Harmonie im Kosmos

Erforschung des
Chaos
Vieweg Verlag

Fraktale, Chaos und
Selbstähnlichkeit
Manfred Schroeder
Spektrum Verlag

Die Titus Bode Reihe

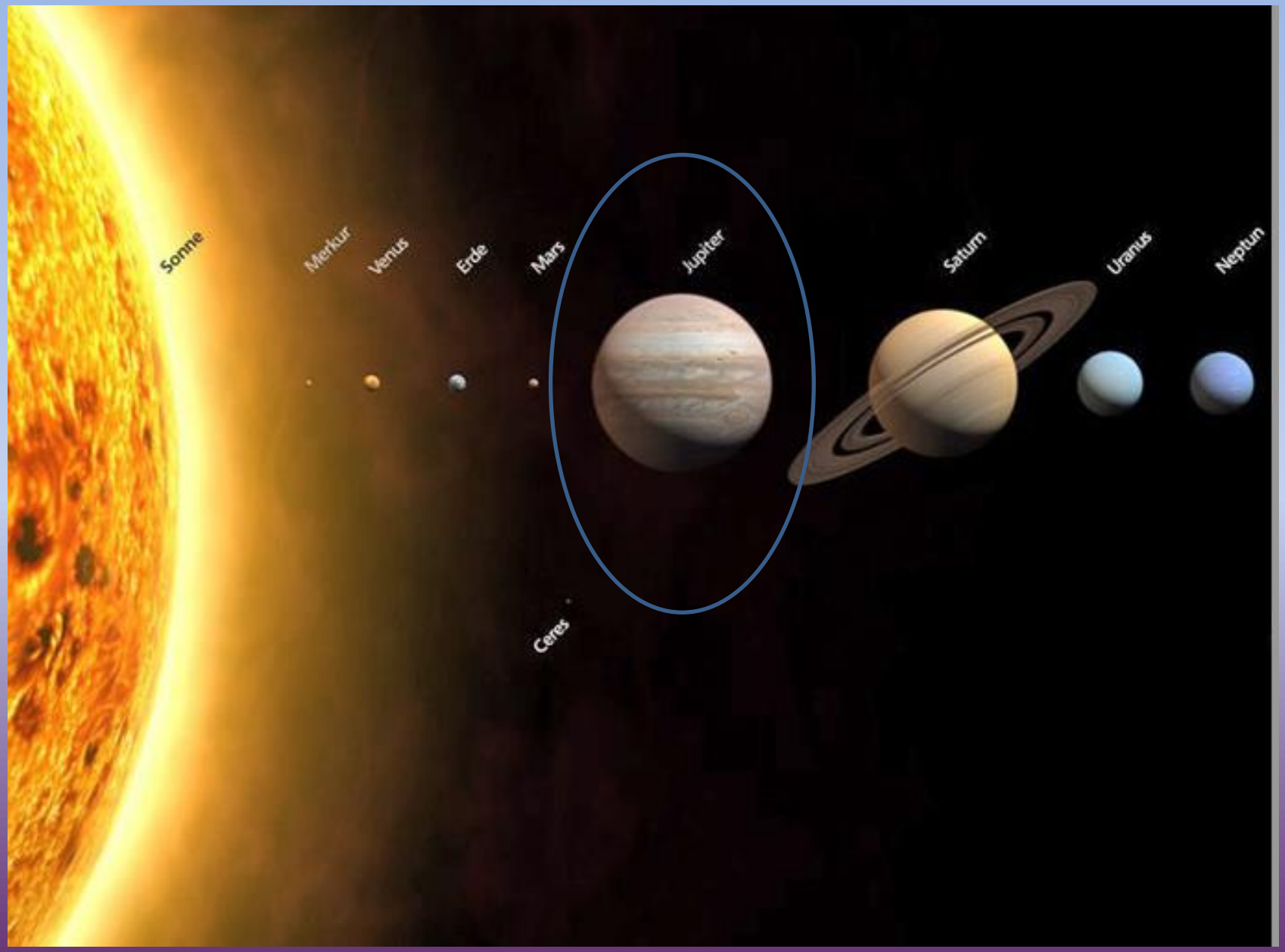
Johann Daniel Titius (1729–1796)
Johann Elert Bode (1747–1826)

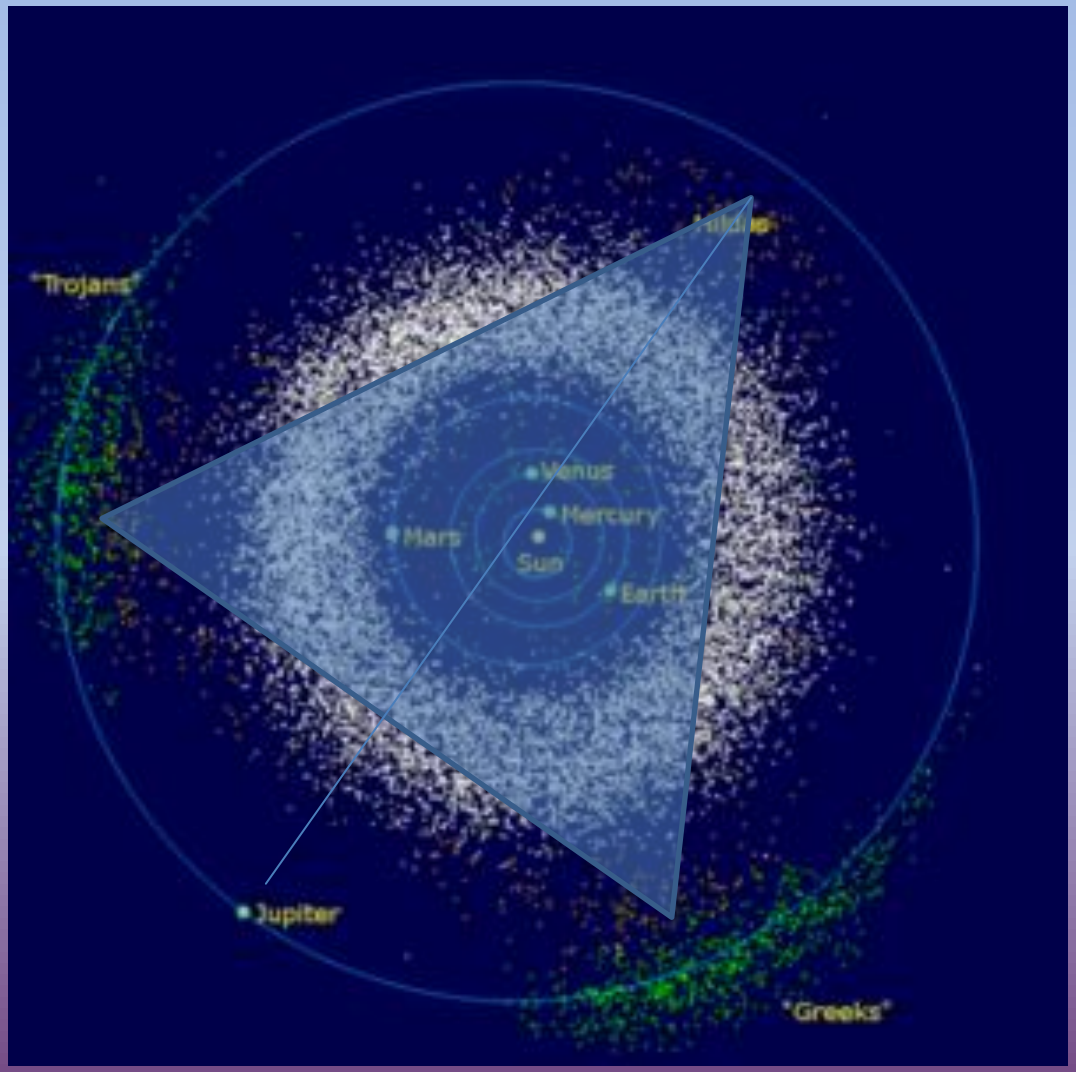
$$a = 0{,}4 + 0{,}3 * 2^n$$

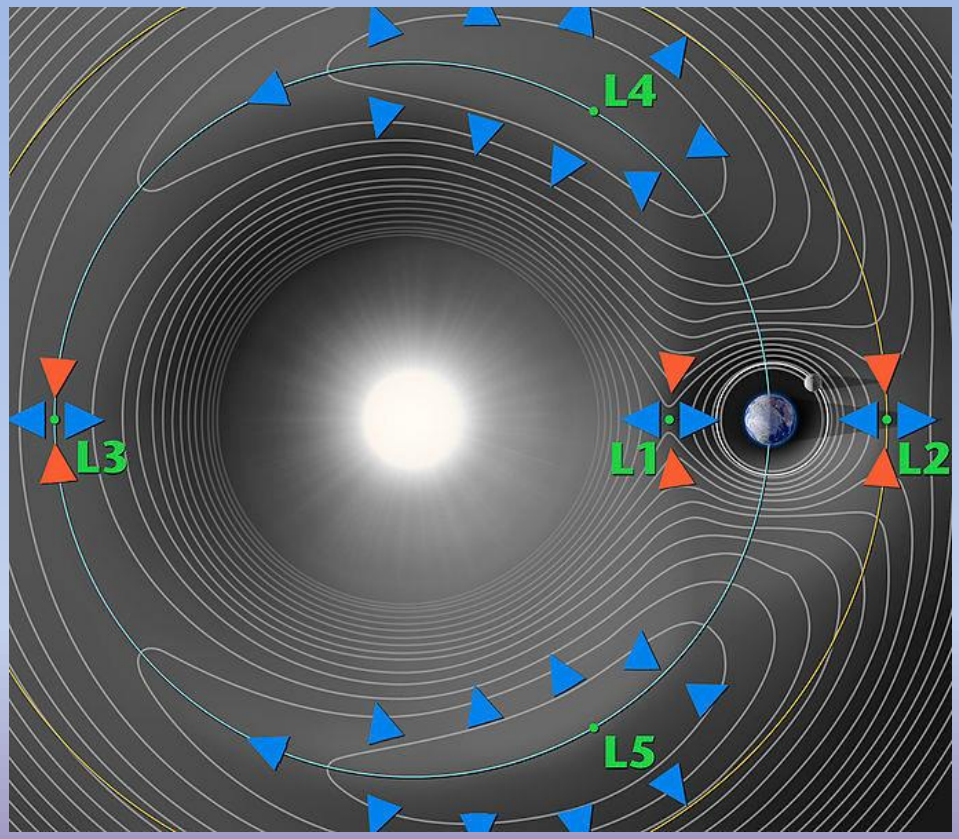
$$n=0,1,2, \ldots$$

Planet	n	Abstand nach T-B	Wirklicher Abstand	Abweichung
Merkur	−∞	0,4	0,39	+ 2,56 %
Venus	0	0,7	0,72	− 2,78 %
Erde	1	1,0	1,00	0,00 %
Mars	2	1,6	1,52	+ 5,26 %
(Ceres)	3	2,8	(2,77)	(+ 1,08 %)
Jupiter	4	5,2	5,20	0,00 %
Saturn	5	10,0	9,54	+ 4,82 %
Uranus	6	19,6	19,19	+ 2,14 %
Neptun	–	–	30,06	–
(Pluto)	7	38,8	(39,48)	(− 1,72 %)
(Eris)	8	77,2	(67,7)	(+ 14,0 %)

Simulationen zur Entstehung von Planetensystemen scheinen Resonanz-Effekte zwischen den Planeten als mögliche Ursache zu bestätigen.
http://de.wikipedia.org/wiki/Titius-Bode-Reihe#Kontroverse

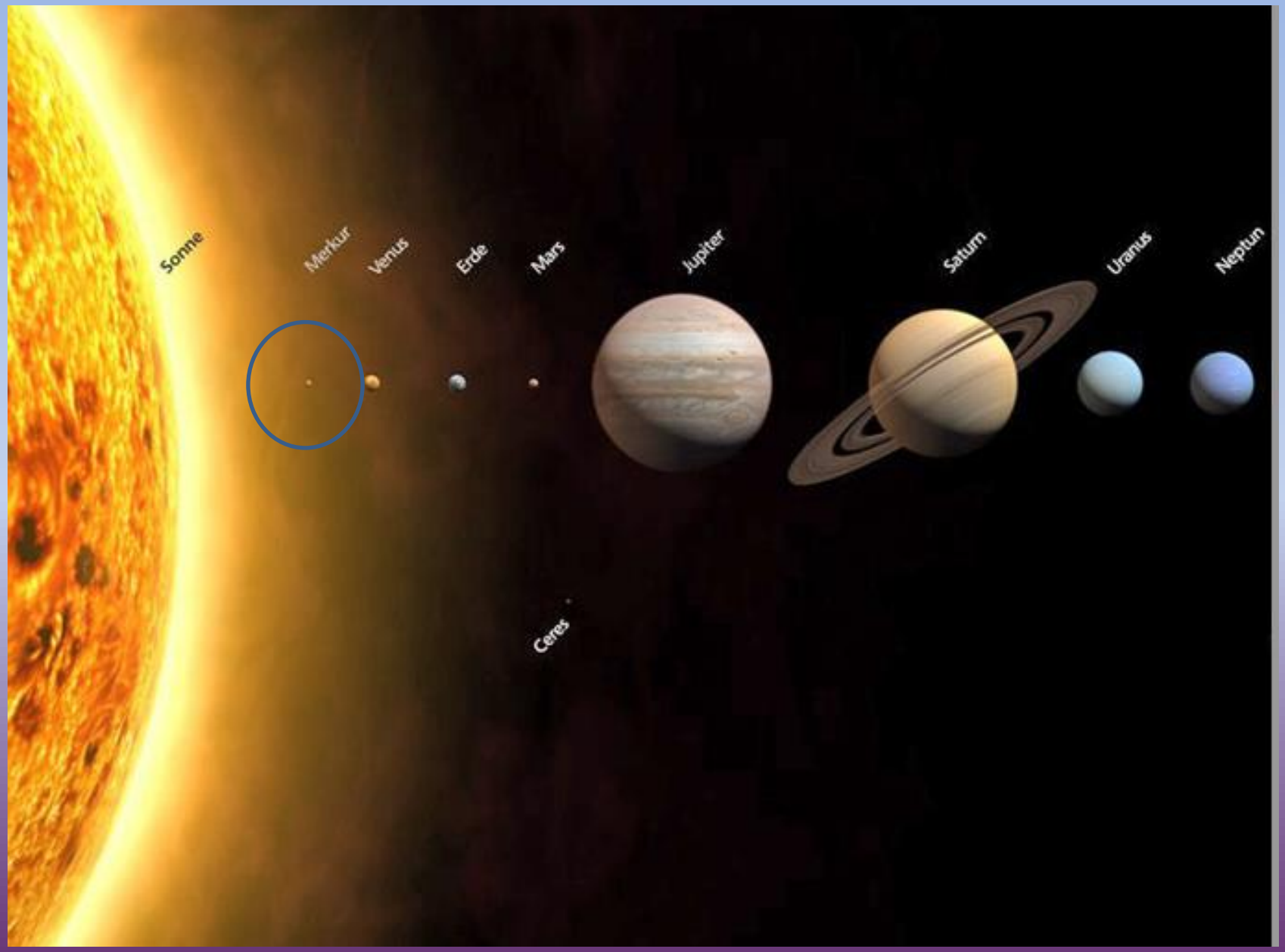

Sonne
Merkur
Venus
Erde
Mars
Ceres
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun


"Trojans"
Venus
Mercury
Mars
Sun
Earth
Jupiter
"Greeks"



http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte

Joseph-Louis de Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris) war ein italienischer Mathematiker und Astronom.

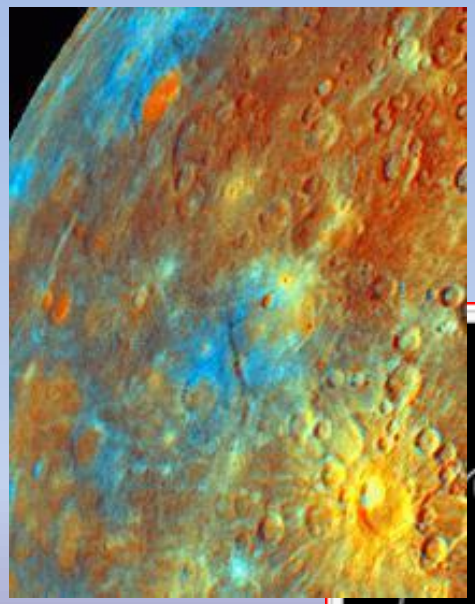

Sonne
Merkur
Venus
Erde
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun
Ceres

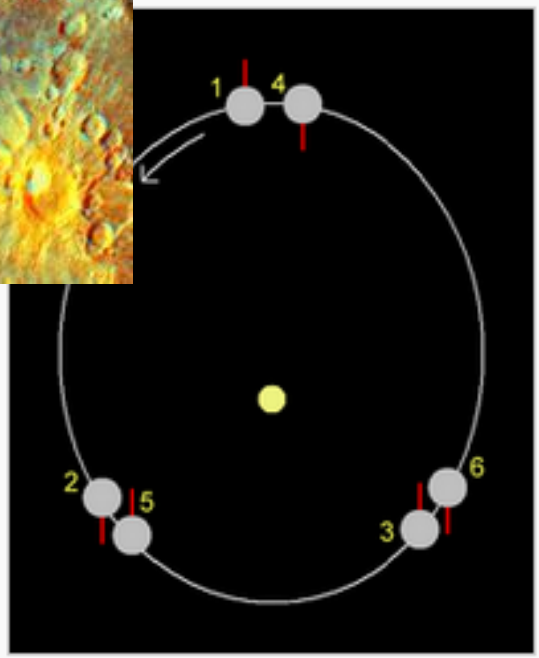
Merkur

Der Merkur läuft in 2 x 58,646 Tagen zwei Mal um die Sonne, dabei rotiert er drei Mal um seine eigene Achse.

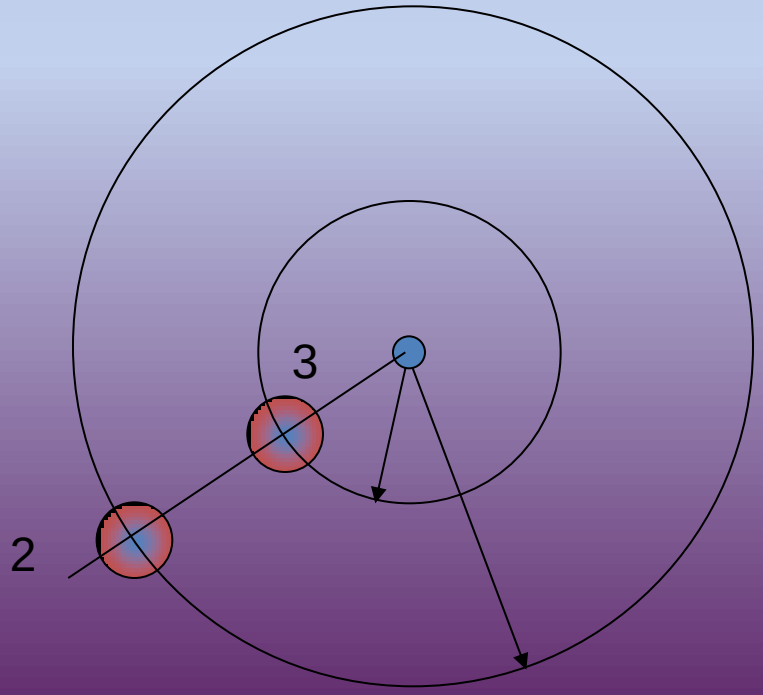
2:3-Kopplung an die schnelle Umlaufbewegung

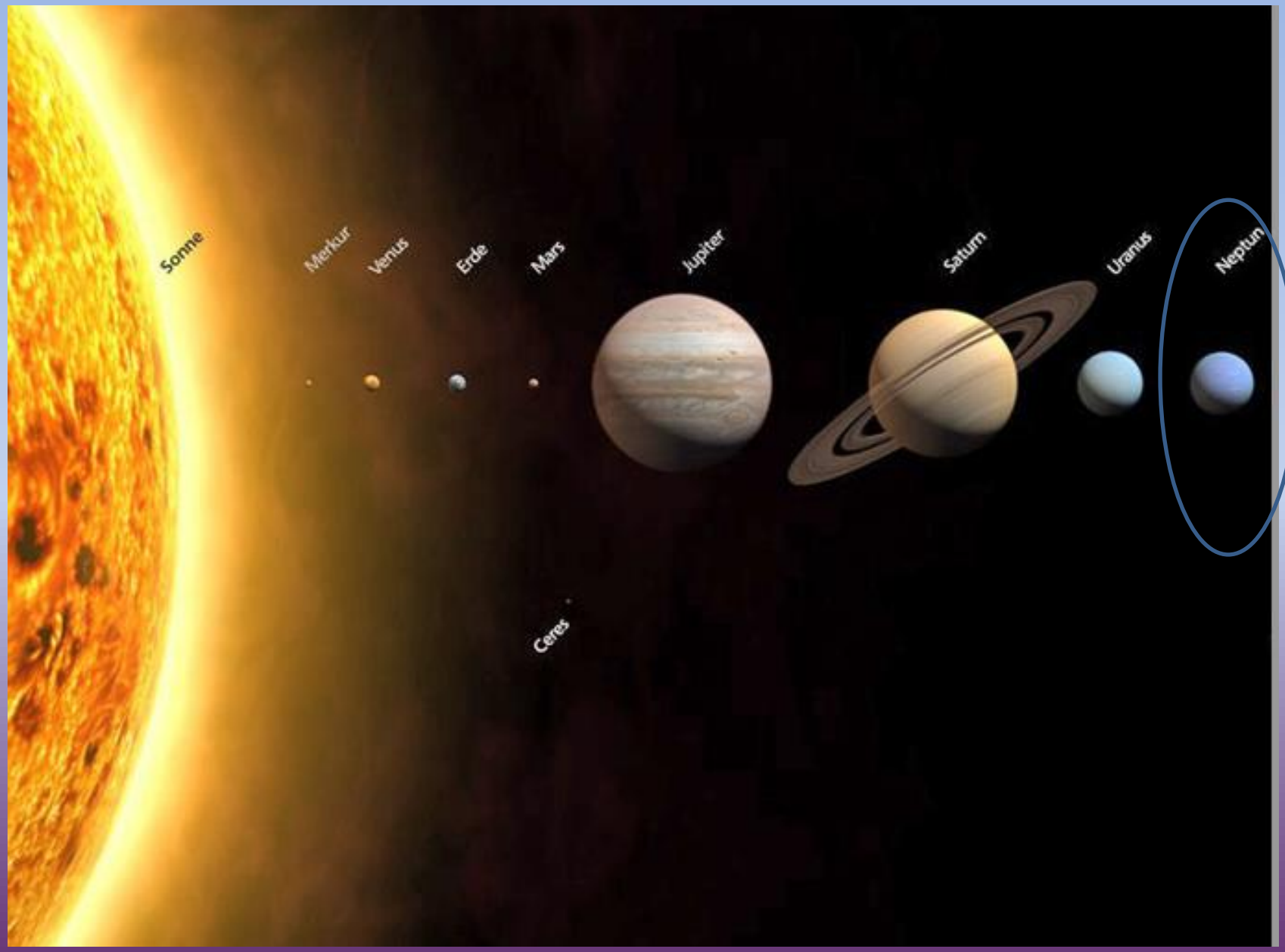
http://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_(Planet)#Rotation



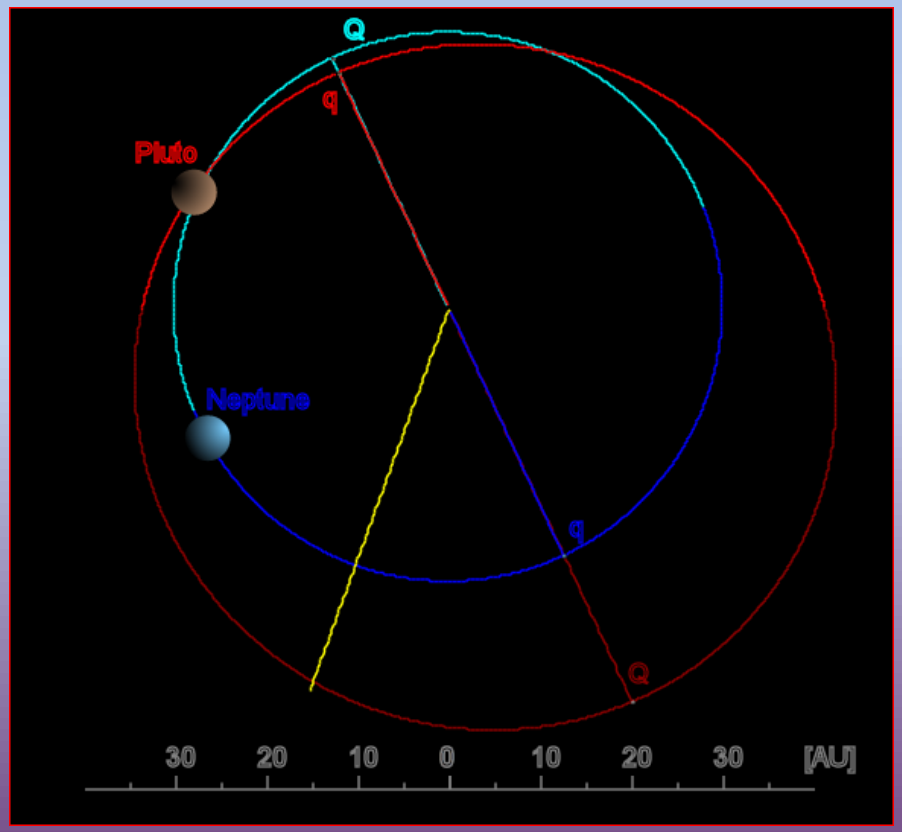


Schema der Resonanz von drei Rotationen zu zwei Umläufen Merkurs

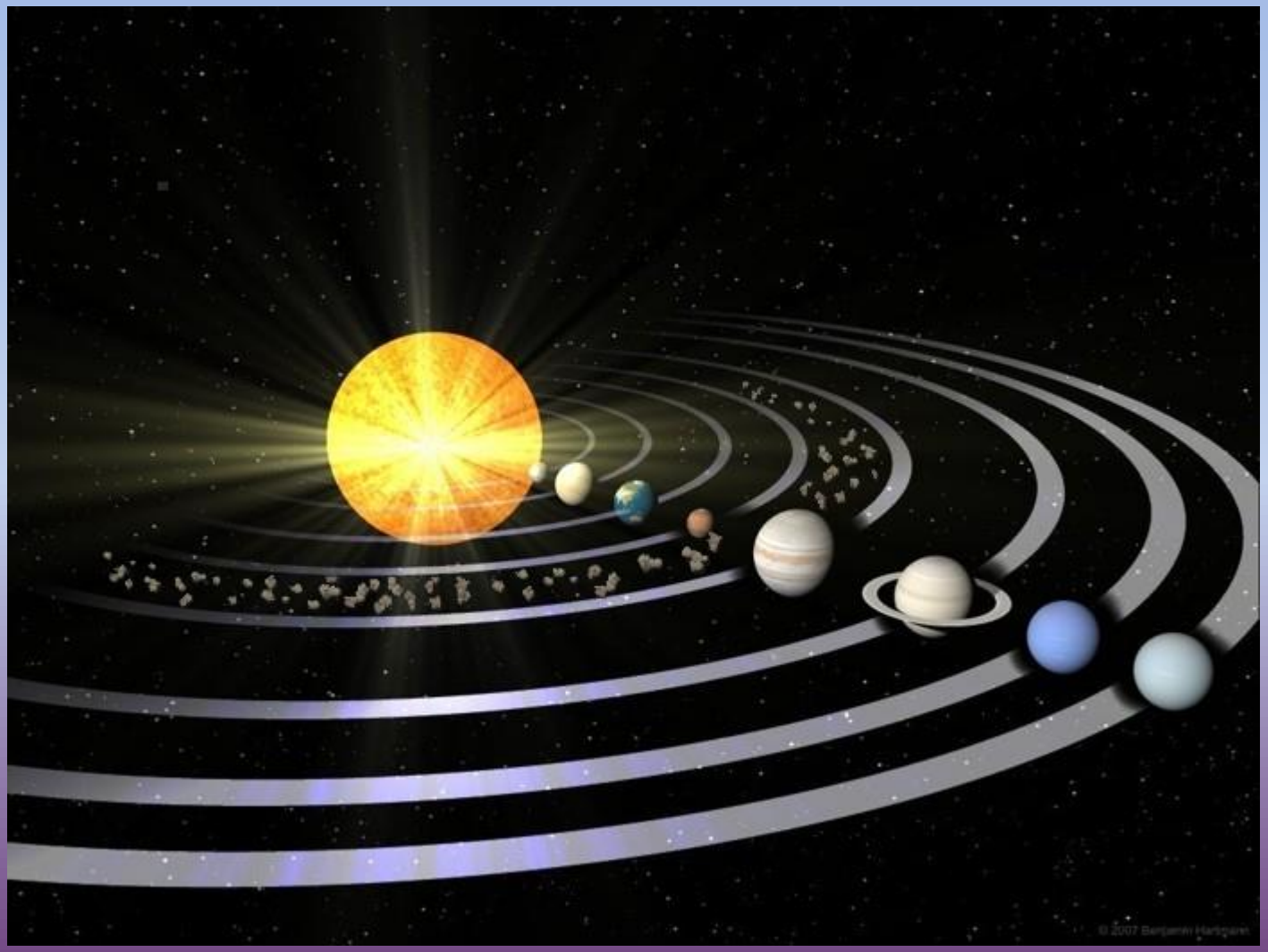


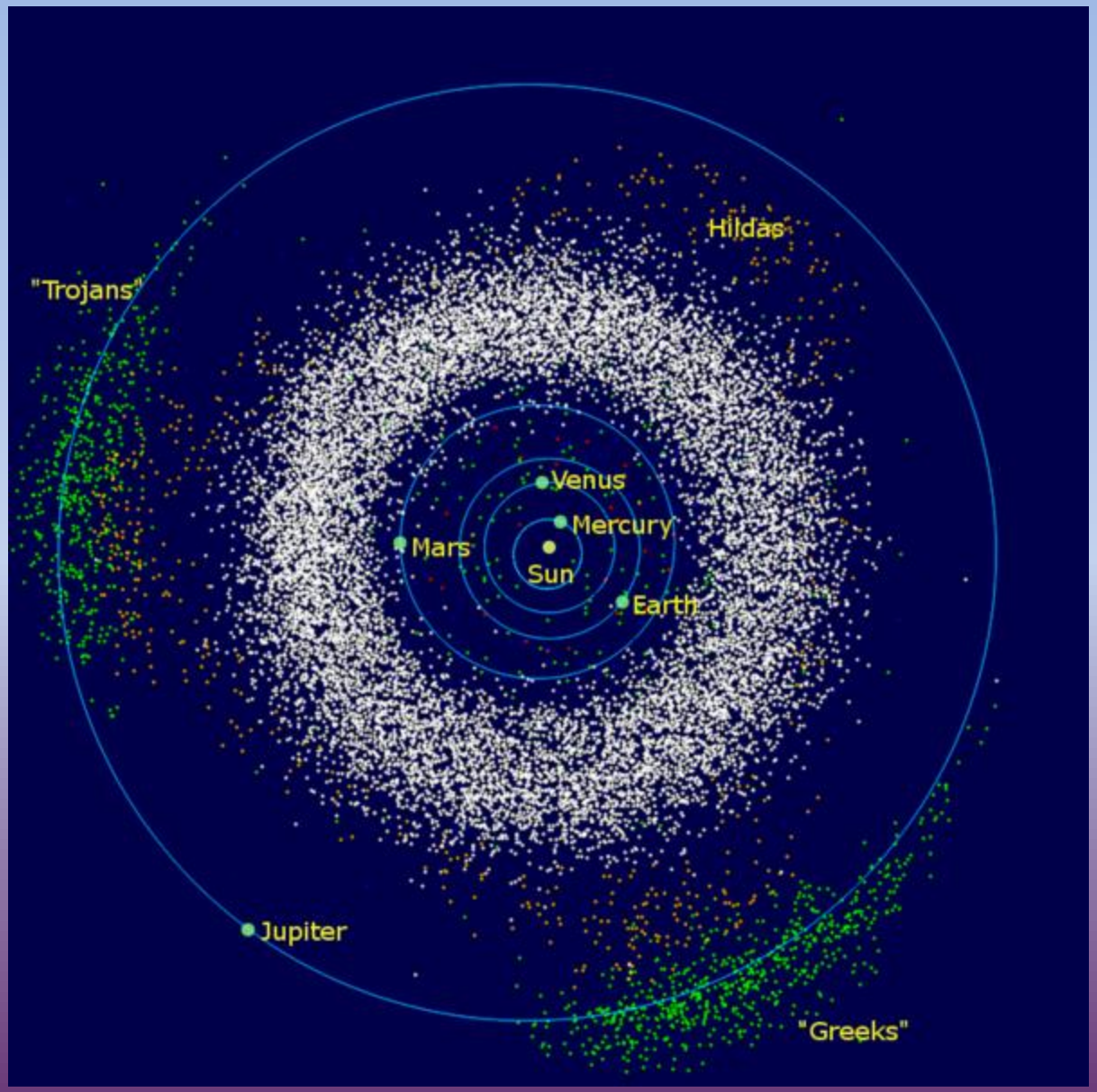

Sonne
Merkur
Venus
Erde
Mars
Ceres
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun

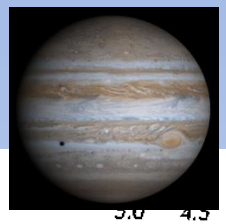
Auffällig ist, dass Pluto in der Zeit, in der sich Neptun drei Mal um die Sonne bewegt, zwei Mal um die Sonne läuft. Man spricht daher von einer 3:2-Bahnresonanz.

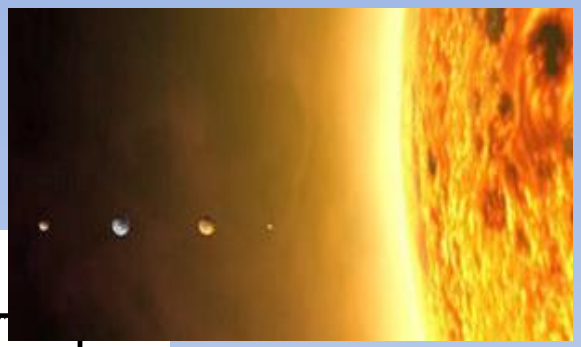


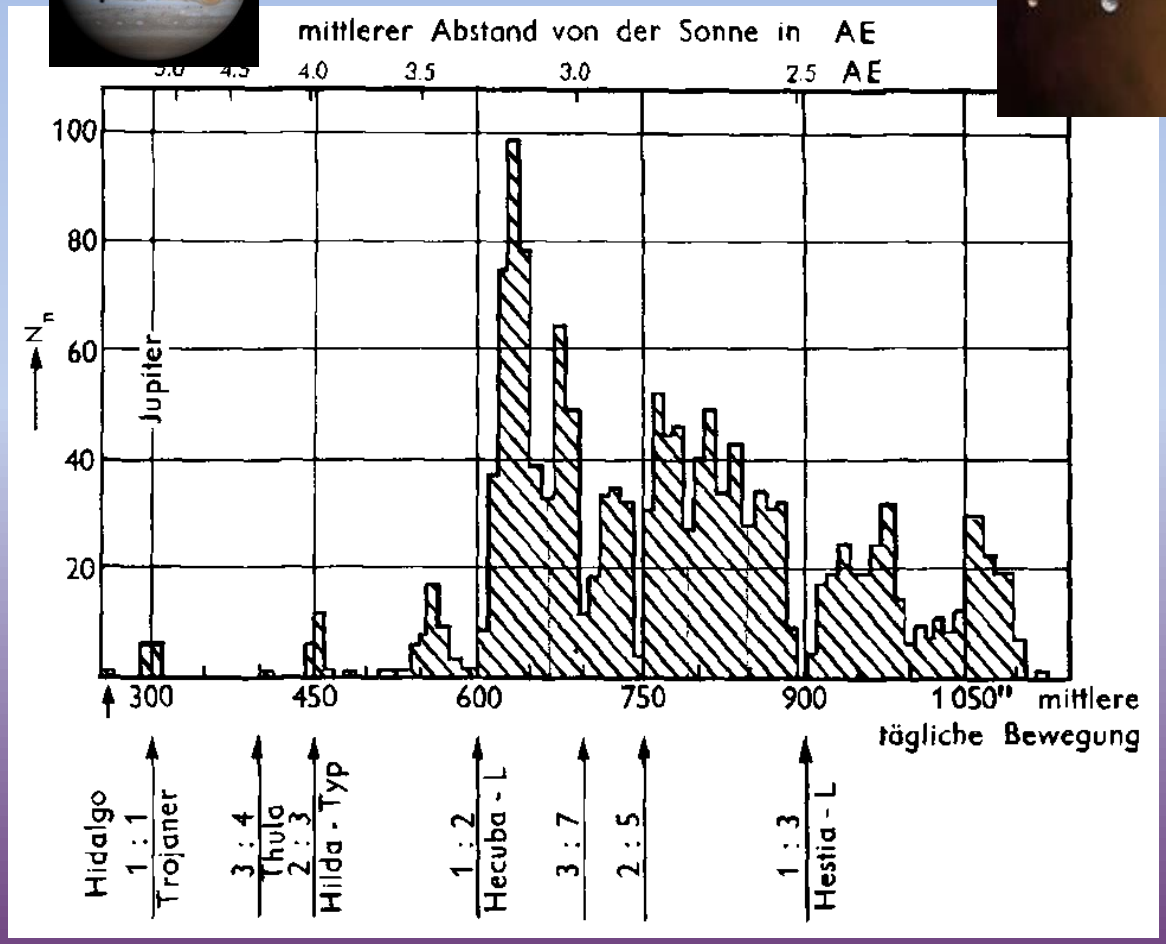
Asterioidengürtel

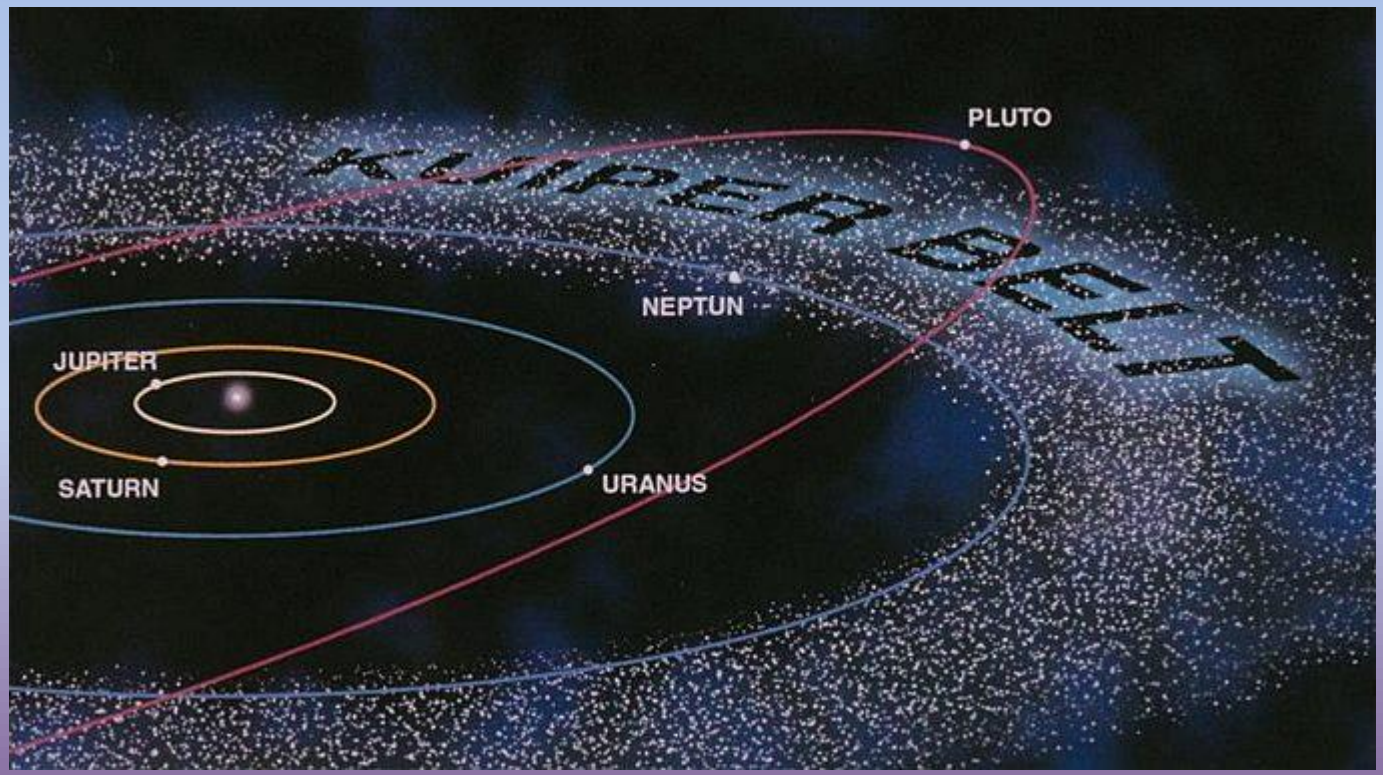



Hildas
"Trojans"
Venus
Mercury
Mars
Sun
Earth
Jupiter
"Greeks"

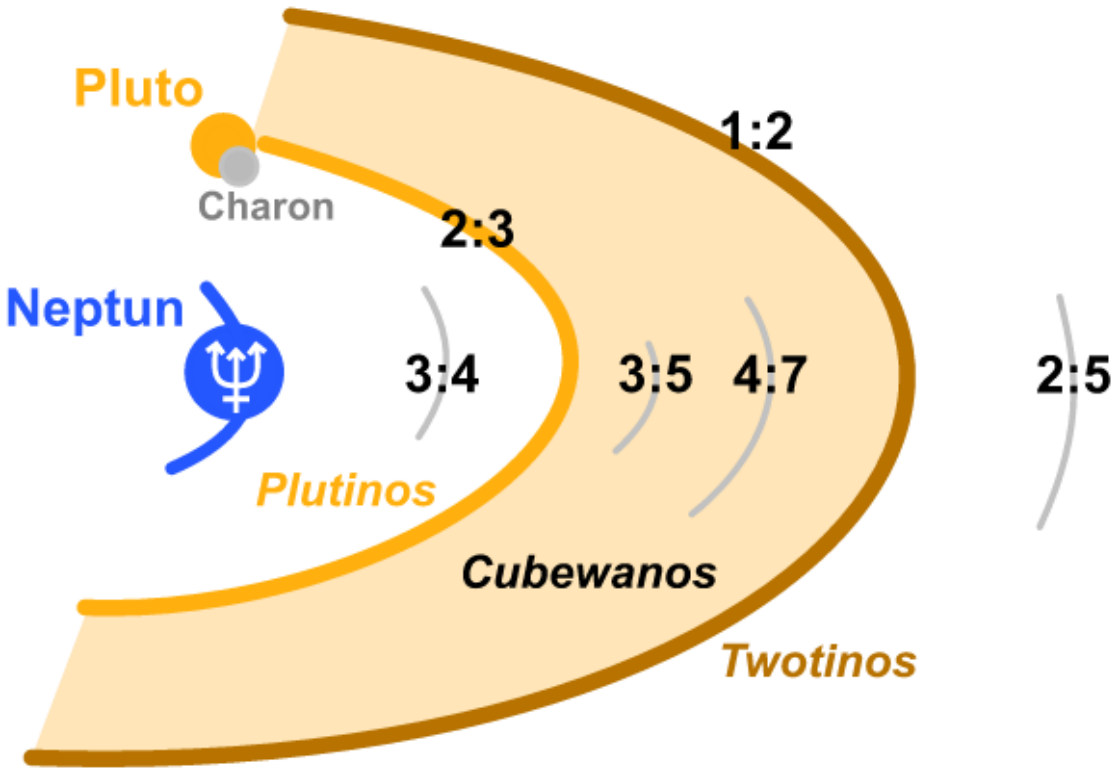


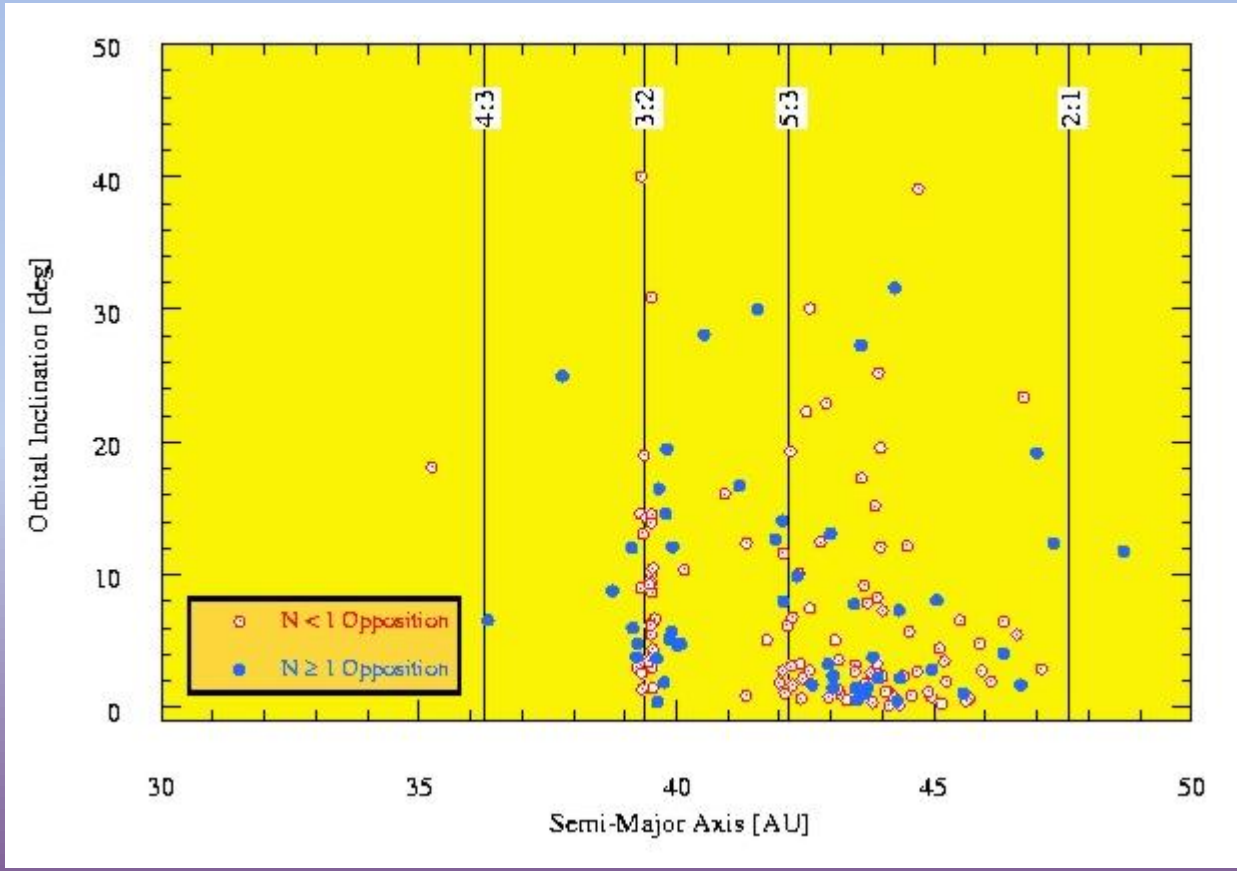



mittlerer Abstand von der Sonne in AE
4.0
3.5
3.0
2.5 AE
100
80
60
40
20
N_n
Jupiter
300
450
600
750
900
1 050"
mittlere tägliche Bewegung
Hidalgo
1 : 1
Trojaner
3 : 4
Thula
2 : 3
Hilda - Typ
1 : 2
Hecuba - L
3 : 7
2 : 5
1 : 3
Hestia - L

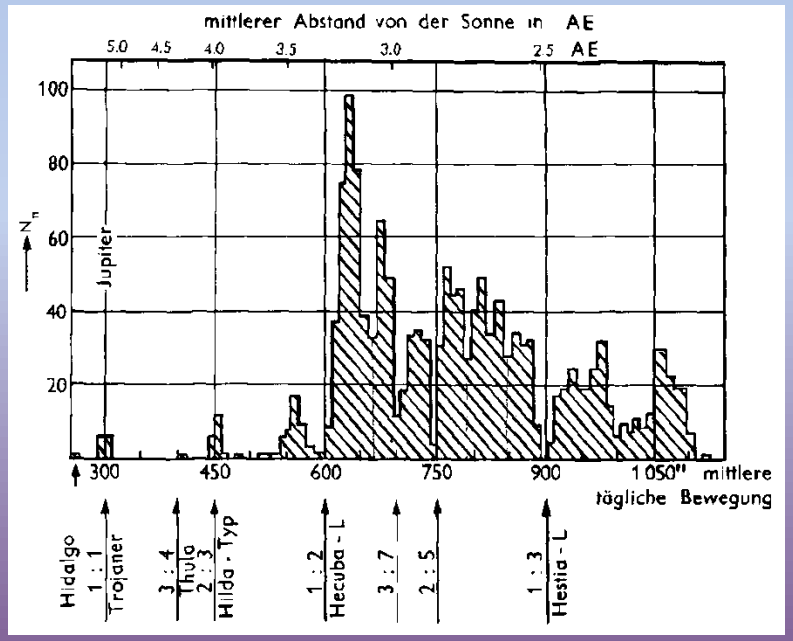

PLUTO
KUIPER BELT
NEPTUN
JUPITER
SATURN
URANUS

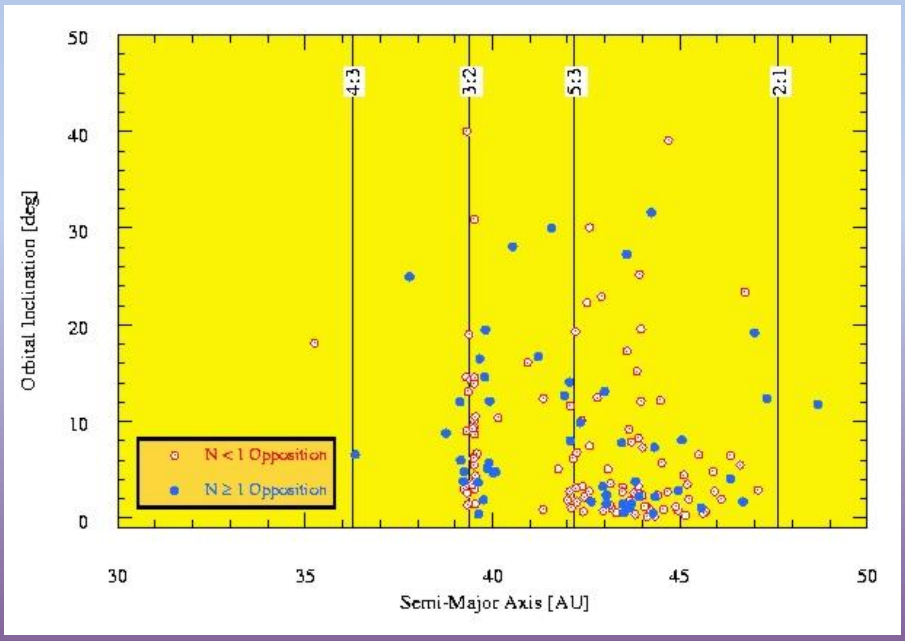
Kuiper-Gürtel und Bahnresonanzen

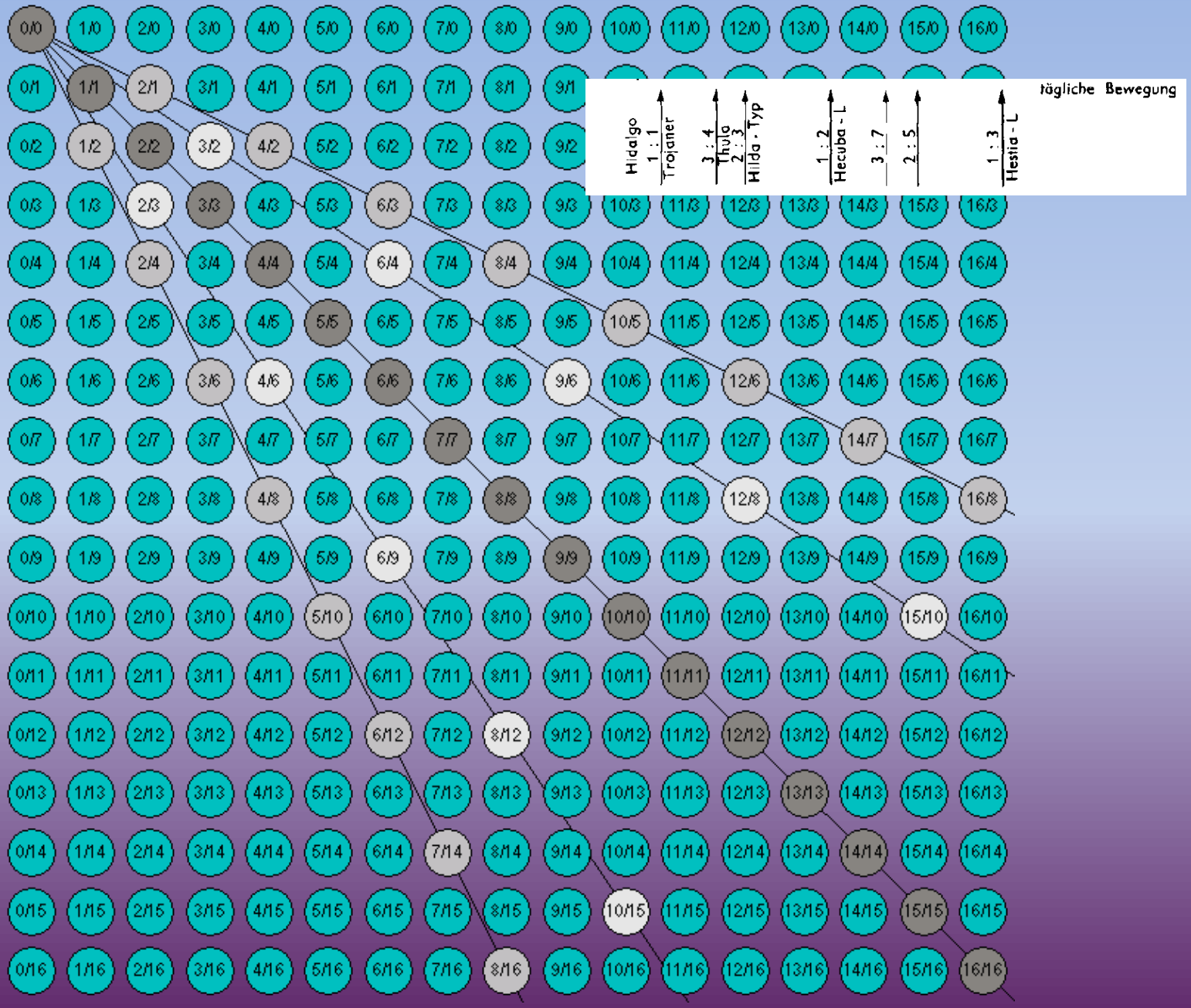


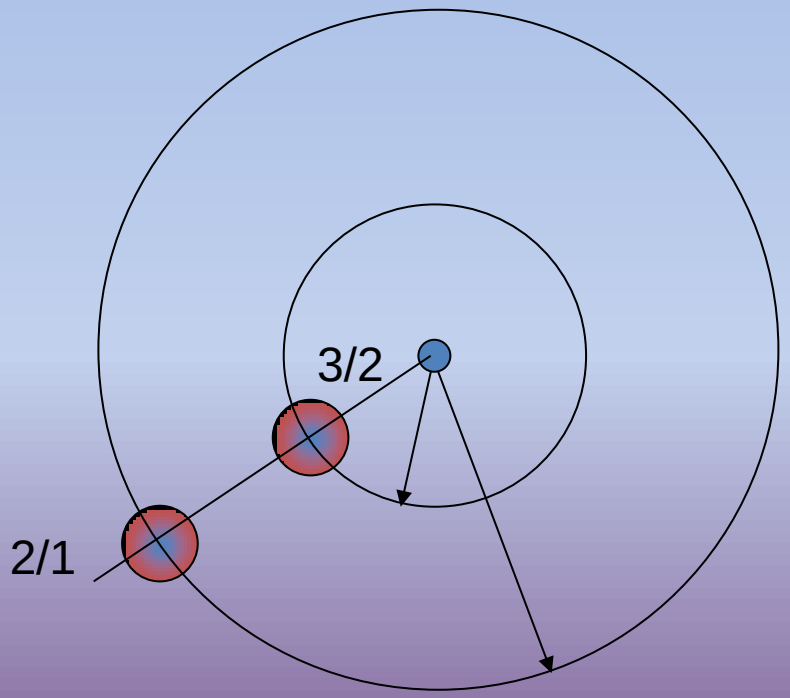

4:3
3:2
5:3
2:1
N < 1 Opposition
N ≥ 1 Opposition
Orbital Inclination [deg]
Semi-Major Axis [AU]
0
10
20
30
40
50
30
35
40
45
50

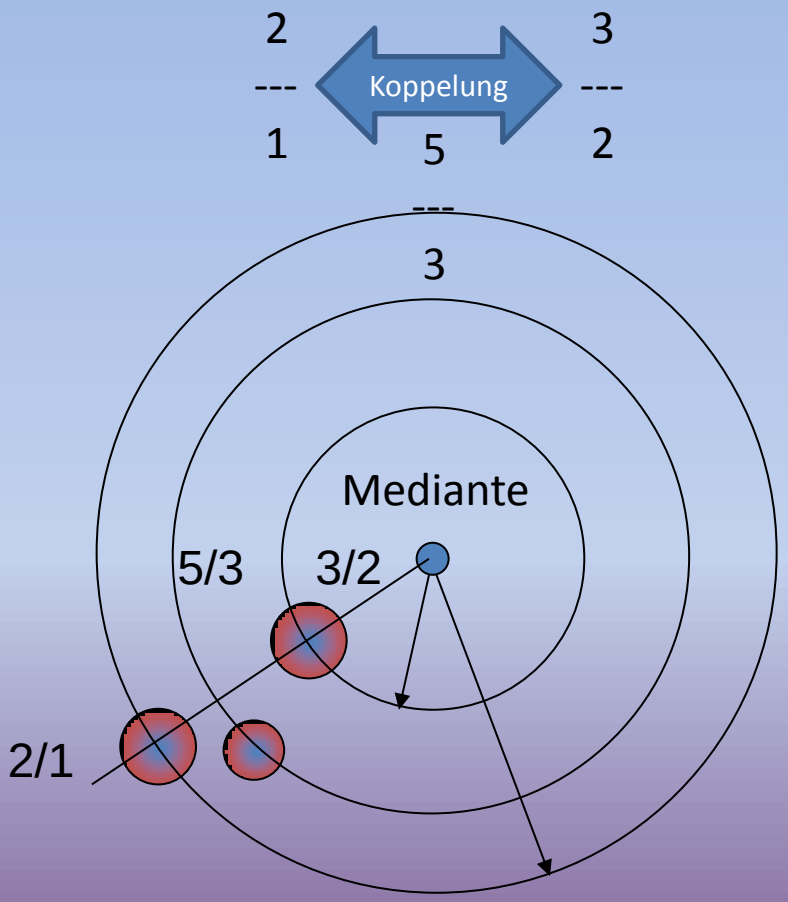
Gibt es einen harmonikalen Kontext der Lückenverteilung (Resonanzverteilung)






tägliche Bewegung
Hidalgo
1 : 1
Trojaner
3 : 4
Thula
2 : 3
Hilda - Typ
1 : 2
Hecuba - L
3 : 7
2 : 5
1 : 3
Hestia - L

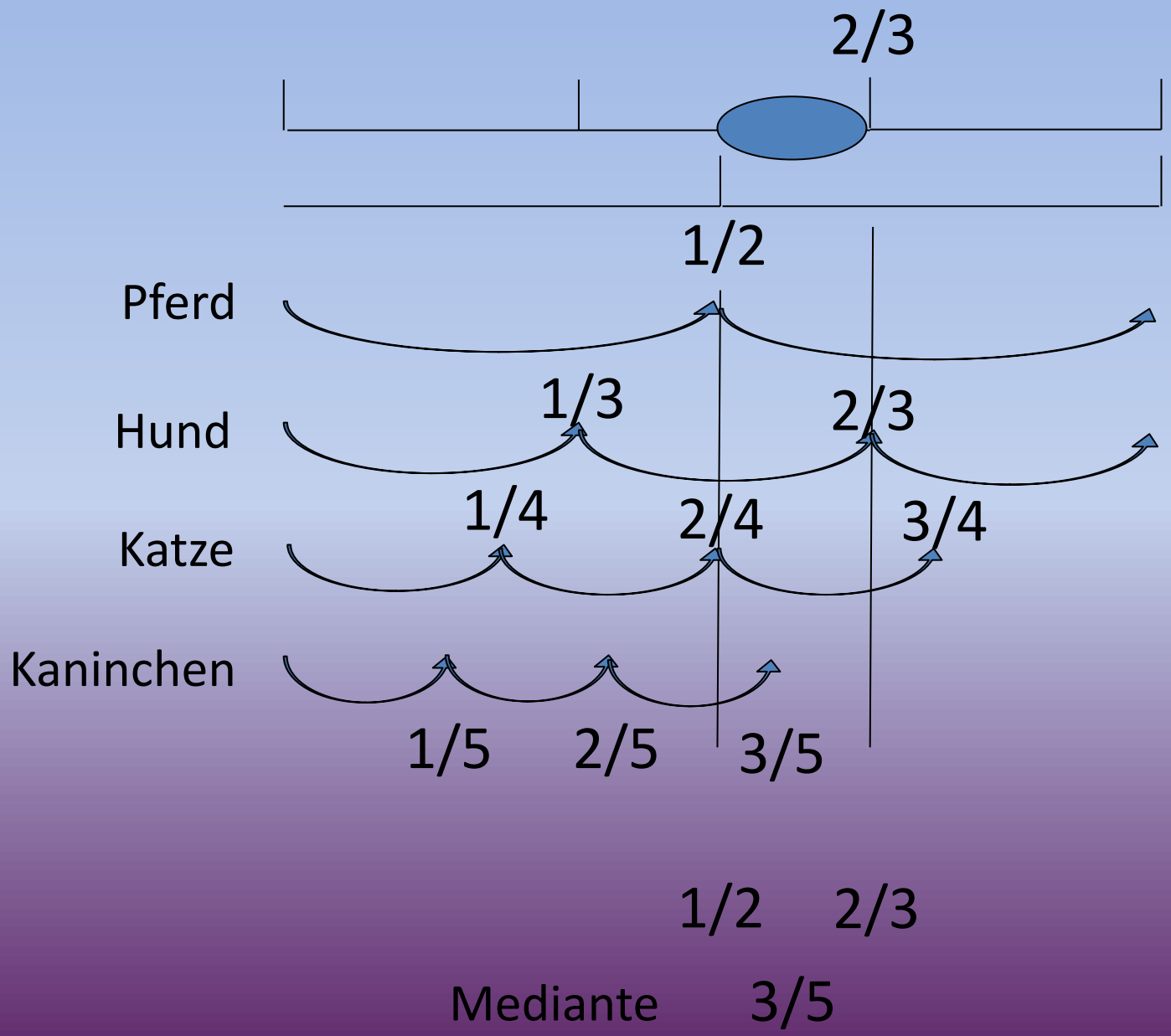

3/2
2/1


2

1
Koppelung
3

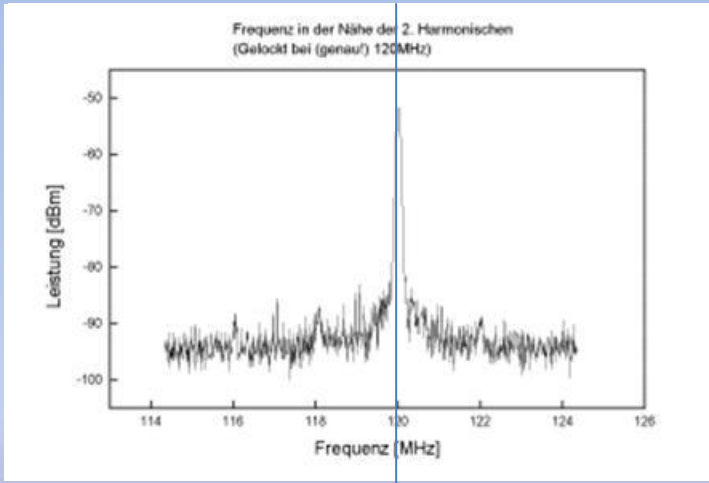
2
5

3
Mediante
5/3
3/2
2/1

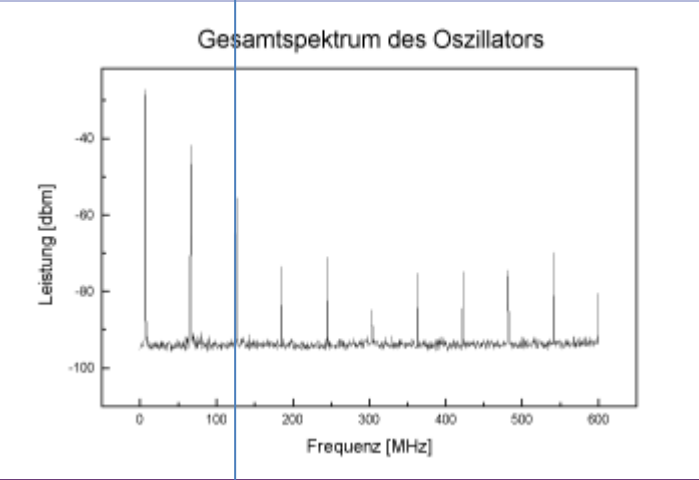

2/3
1/2
Pferd
1/3
2/3
Hund
1/4
2/4
3/4
Katze
Kaninchen
1/5
2/5
3/5
1/2
2/3
Mediante
3/5

Aus der Chaostheorie weis man, dass zwei frequenzgekoppelte Systeme eine gemeinsame wahrscheinliche Koppelfrequenz bilden, welche durch die sogenannte ***Mediante*** der beiden Einzelfrequenzen gebildet wird. 1) S.352 ff

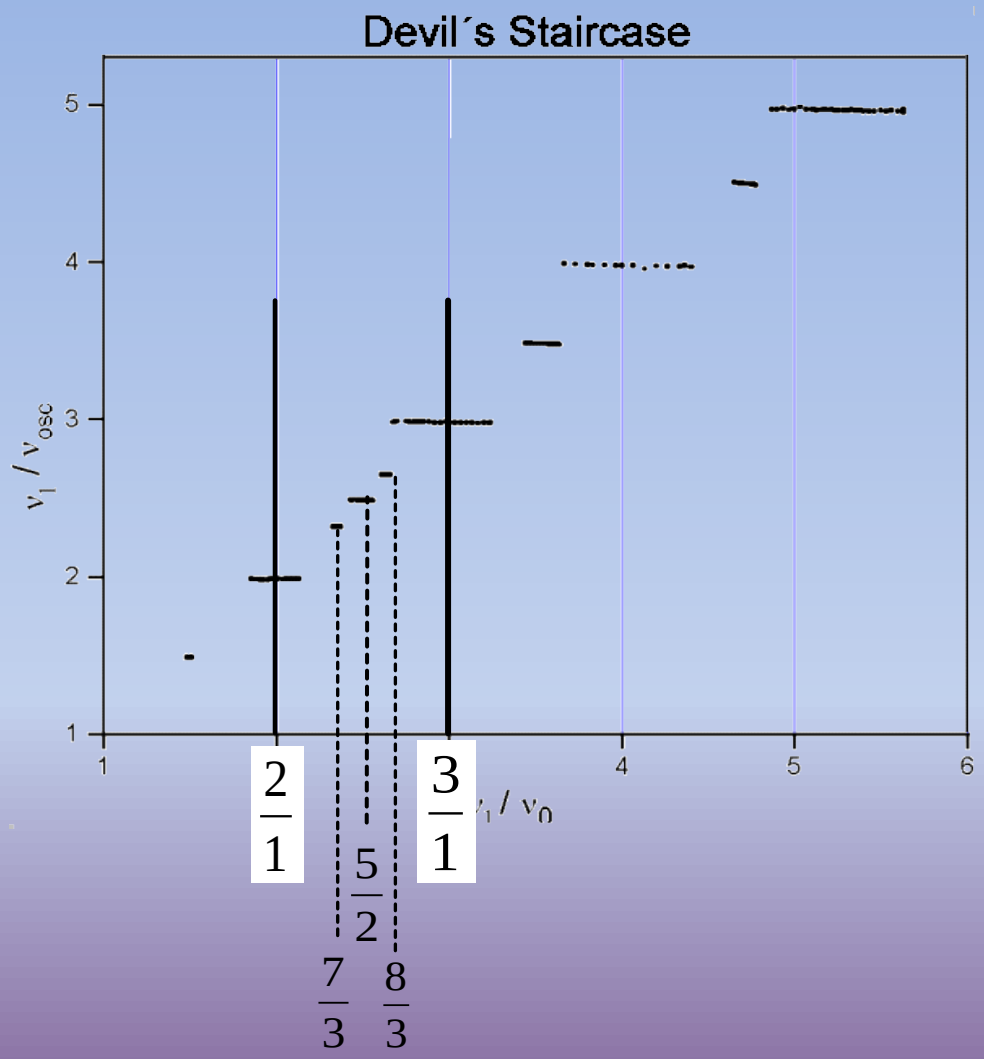
Graph1 zeigt die 1.Oberschwingung im "Normalzustand" d.h. bei ausgeschaltetem Frequenzgenerator. Es ist deutlich eine Frequenzinstabilität zu beobachten (kein scharfes Spektrum).

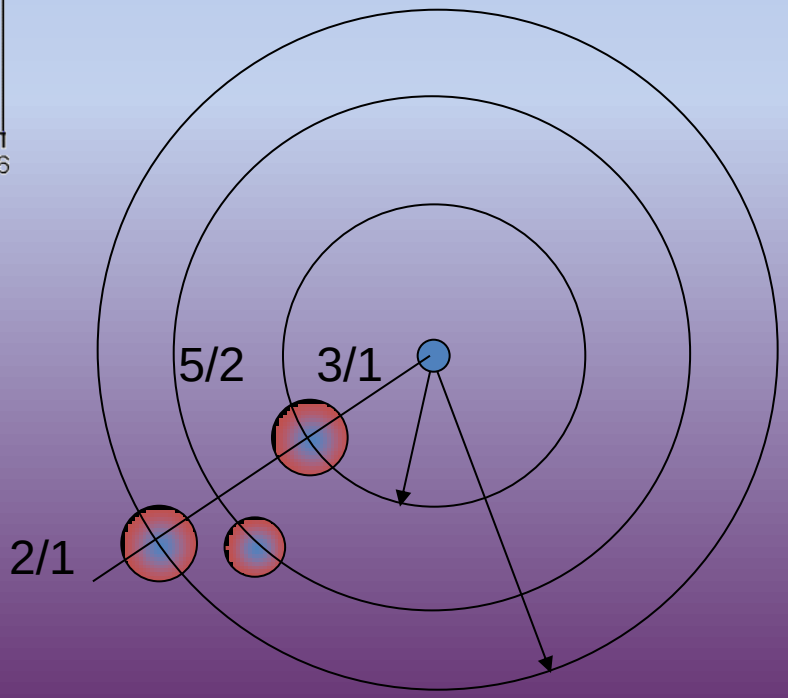


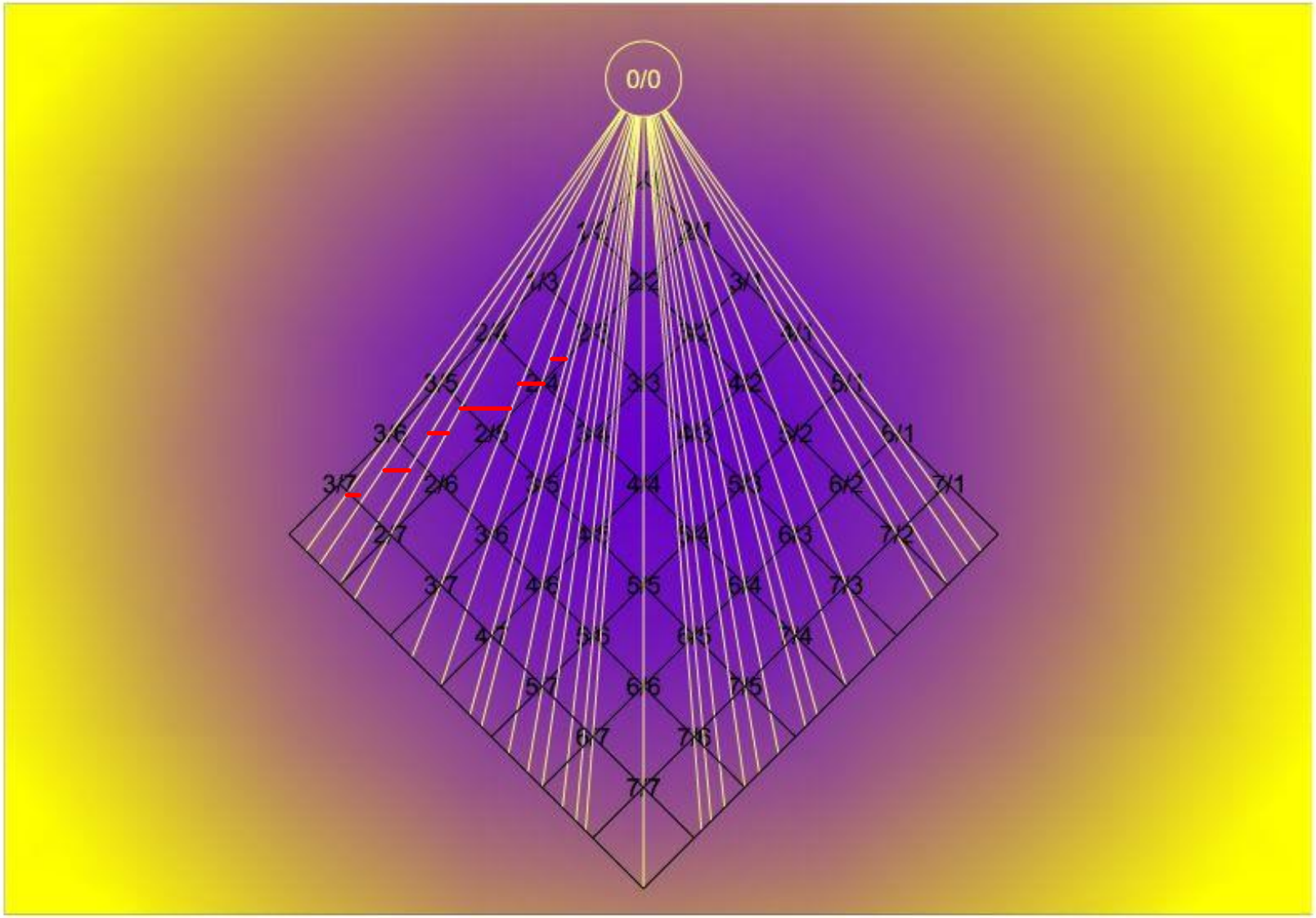
Oszilator mit harmonischem Frequenzspektrum Wird dazu geschaltet



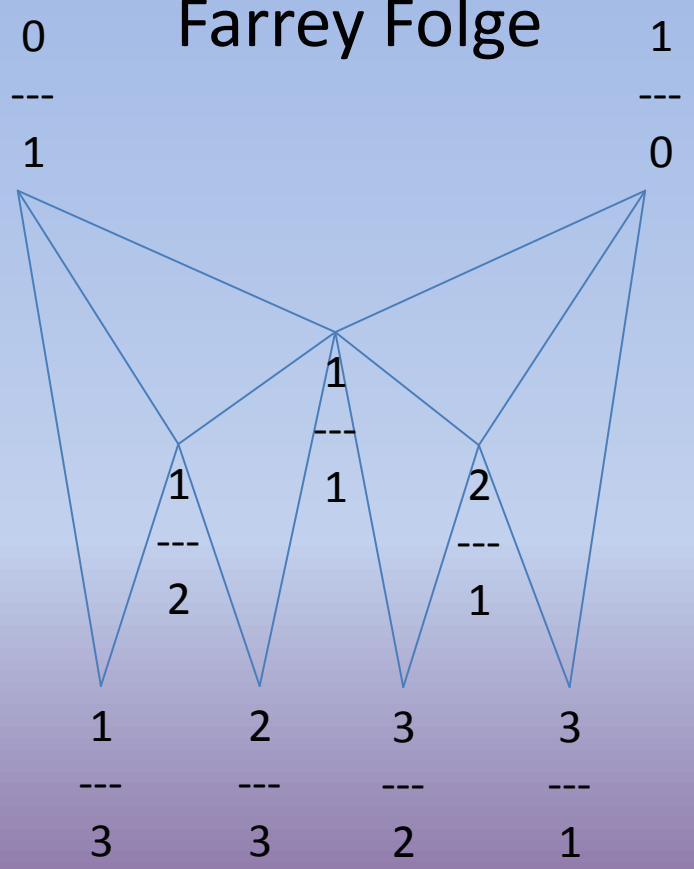
1) Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit
Manfred Schroeder
Spektrum Verlag


Devil´s Staircase
ν_1 / ν_{osc}
ν_1 / ν_0
1
2
3
4
5
6
$\frac{2}{1}$
$\frac{3}{1}$
$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{3}$
$\frac{8}{3}$


5/2
3/1
2/1


0/0
1/1
1/2
2/1
1/3
2/2
3/1
2/3
3/2
4/1
3/5
2/4
3/3
4/2
5/1
3/6
2/5
3/4
4/3
5/2
6/1
3/7
2/6
3/5
4/4
5/3
6/2
7/1
2/7
3/6
4/5
5/4
6/3
7/2
3/7
4/6
5/5
6/4
7/3
4/7
5/6
6/5
7/4
5/7
6/6
7/5
6/7
7/6
7/7

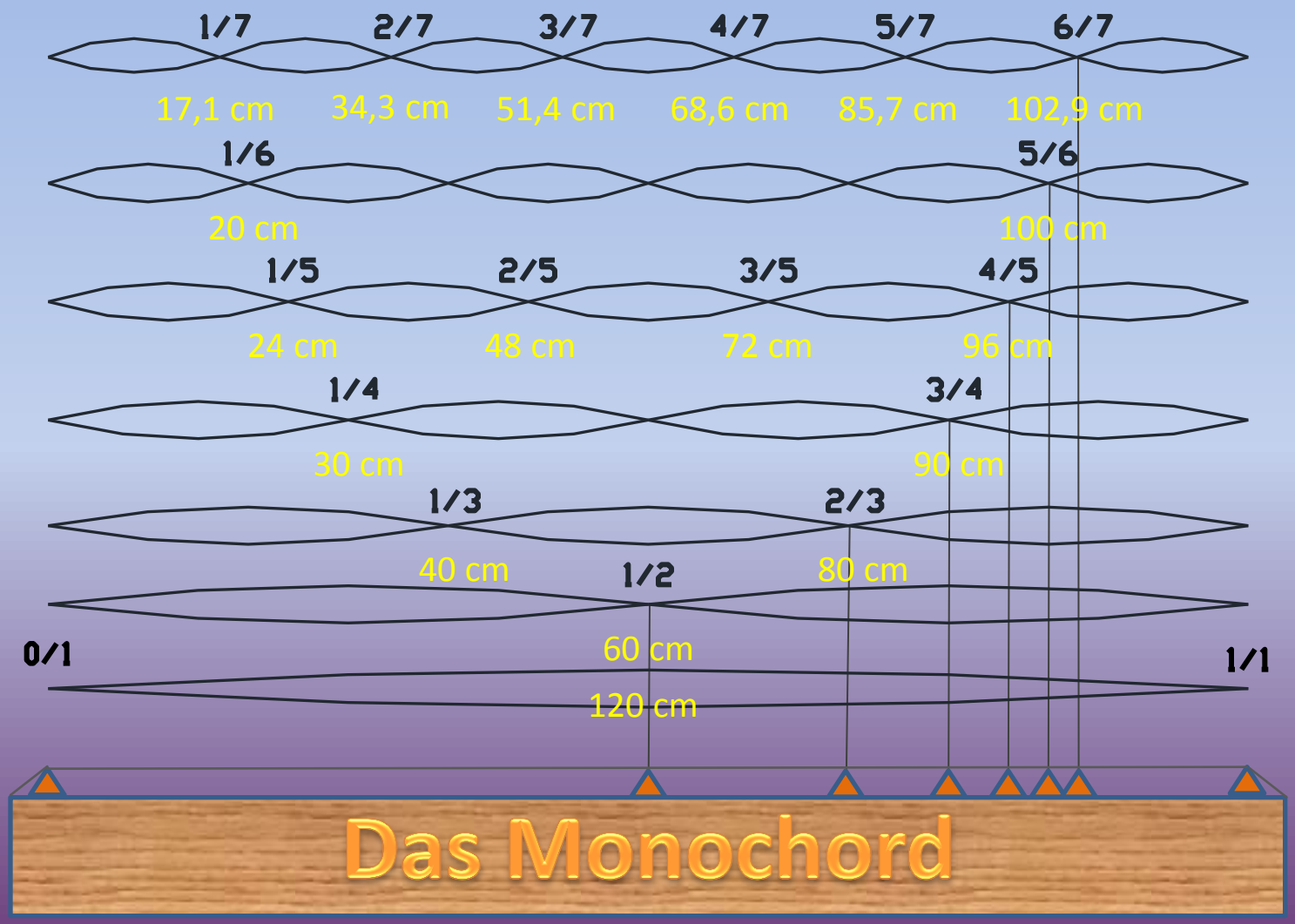
Farrey Folge

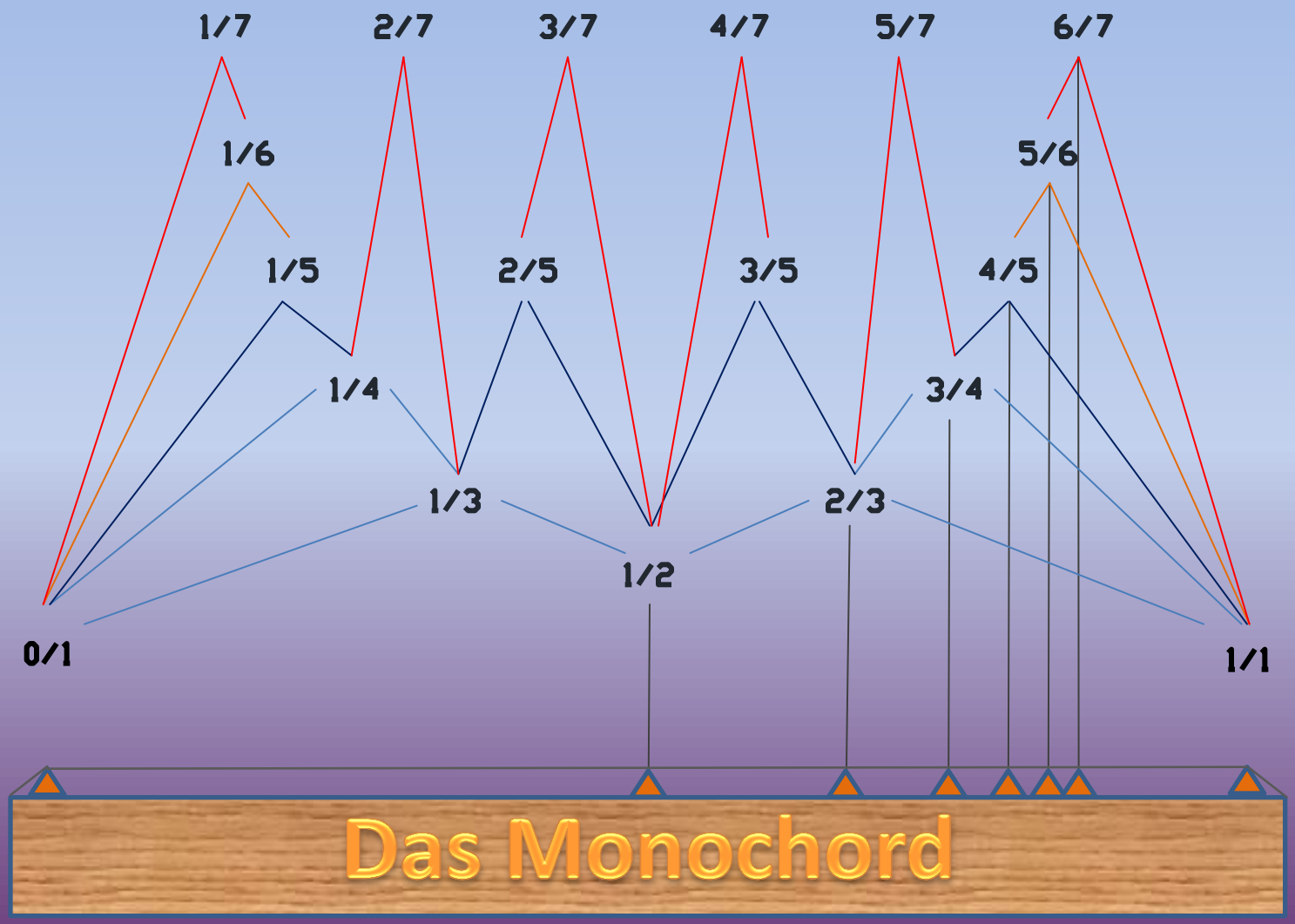


F_4

0	1	1	2	1	3	2	3	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---
1	3	2	3	1	2	1	1	0

Die Farrey Folge in der Obertonreihe





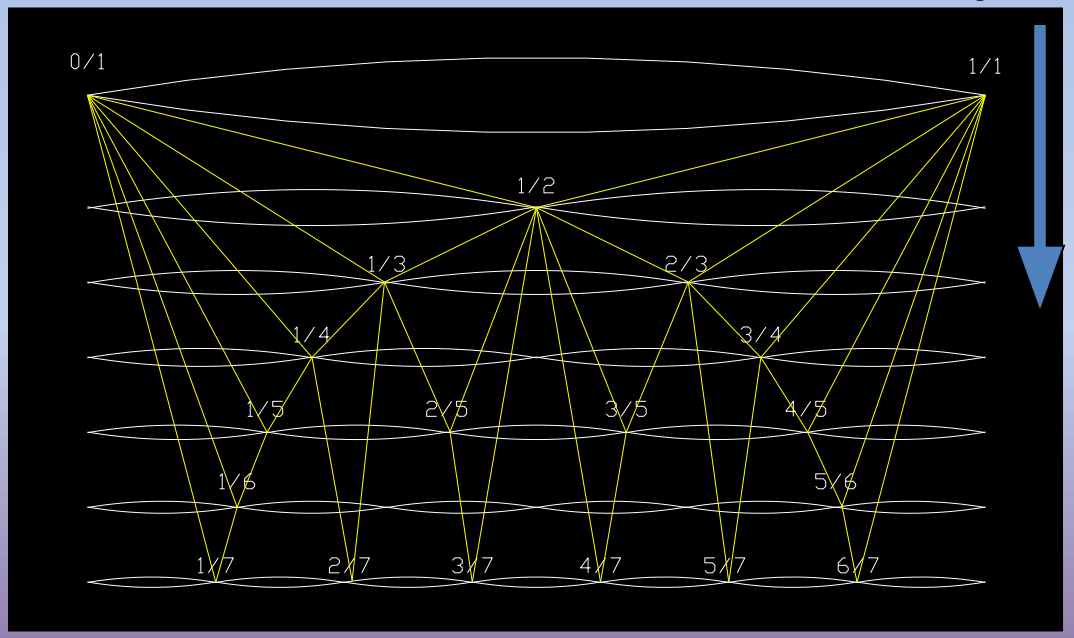
Copyright W.Limbrunner 28. April 2012

Die Farey-Folge oder die zweidimensionale Fibonaccireihe

In unserer Darstellung lassen sich die angegebenen Brüche auf einfache Weise finden. Die oberste Reihe beginnt mit den Brüchen 0/1,1/1 Addiert man nun Zähler 0+1=1 und Nenner 1+1=2, so ist der erste Bruch 1/2 gefunden. Ebenso verfährt man mit allen anderen Die Elternbrüche 0/1, und 1/3 ergeben 1/4 usw. Dass sich diese auf die Obertöne abbilden lasst zeugt von ihrer universellen Bedeutung,

Die gelben Verbindungslinien Markieren jeweils die Elternbrüche, aus denen die Nachfolger hervorgingen. Die Knoten auf denen gelbe Zeugerlinien treffen haben über sich keinen Punkt. Das heißt ihre Position in der Waagerechten Achse ist einmalig. Eine senkrechte Gerade durch einen beliebigen Knoten würde niemals auf einen anderen Knoten treffen. Es treten nur gekürzte Brüche auf.

Wachsende Energie



Das Prinzip der Addition zweier Vorgängerzahlen entspricht dem der Fibonaccireihe.

Eine dreieckig geformte Darstellung der Fareyfolge Zeigt die darin enthaltene Ordnung.

0/1 **1/1**
1/2
1/3 2/3
1/4 2/4 **3/4**
1/5 2/5 3/5 4/5
1/6 2/6 3/6 4/6 **5/6**
1/7 2/7 3/7 4/7 5/7 6/7

Die Farey-Folge F_7={1/7,1/6,1/5,1/4,2/7,1/3,2/5,3/7,1/2,4/7,3/5,2/3,5/7,3/4,4/5,5/6,6/7,1/1}

0/1 1/0

0/1

1/2 2/1

1/3 2/3 3/2 3/1

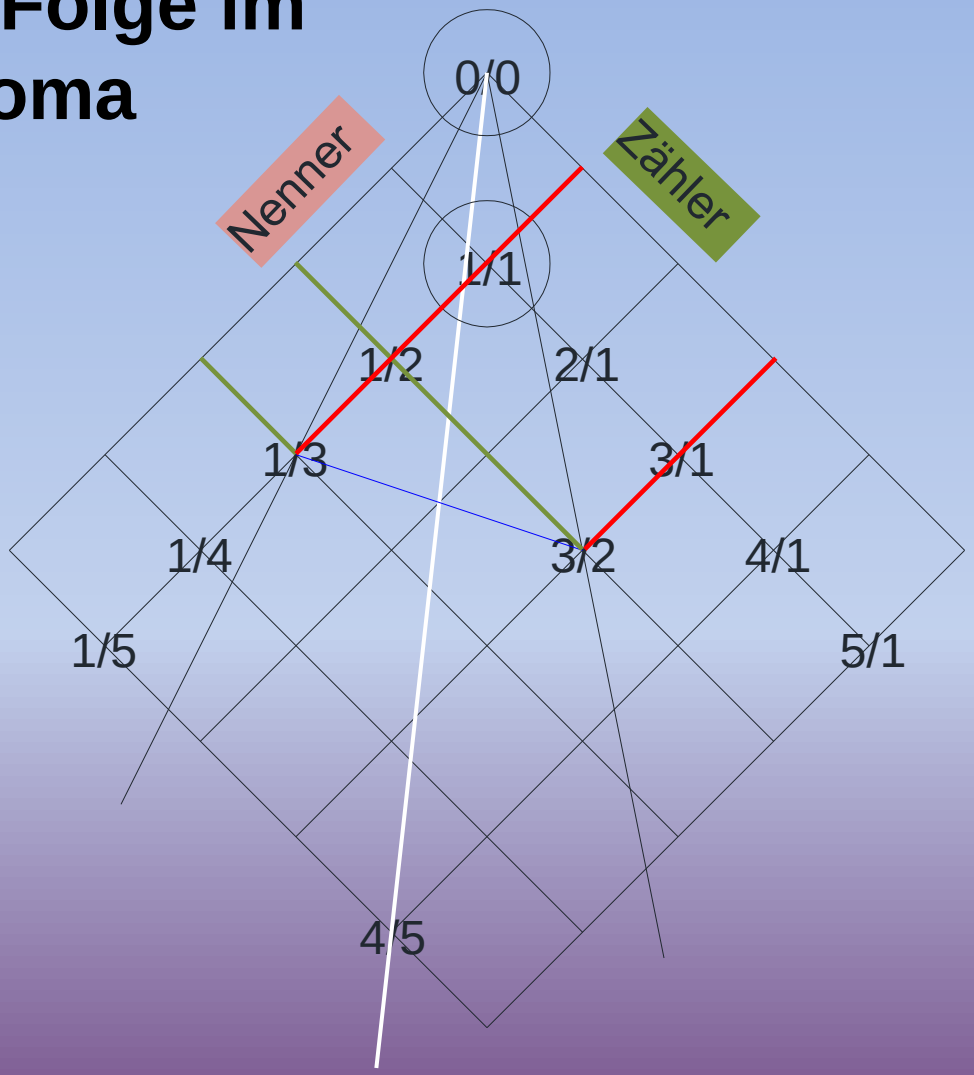
1/4 2/5 3/5 3/4 4/3 5/3 5/2 4/1

1/5 2/7 3/8 3/7 4/7 5/8 5/7 4/5 5/4 7/5 8/5 7/4 7/3 8/3 7/2 5/1

1/6 2/9 3/11 3/10 4/11 5/13 5/12 4/9 5/9 7/12 8/13 7/11 7/10 8/11 7/9 5/6 6/5 9/7 11/8 10/7 11/7 13/8 12/7 9/5 9/4 12/5 13/5 11/4 10/3 11/3 9/2 6/1

1/7 2/11 3/14 3/13 4/15 5/18 5/17 4/13 5/14 7/19 8/21 7/18 7/17 8/19 7/16 5/11 6/13 9/16 11/19 10/17 11/18 13/21 12/19 9/14 9/13 12/17 13/18 11/15 10/13 11/14 9/11 6/7 7/6 11/9 14/11 13/10 15/11 18/13 17/12 13/9 14/9 19/12 21/13 18/11 17/10 19/11 16/9 11/6 11/5 16/7 19/8 17/7 18/7 21/8 19/7 14/5 13/4 17/5 18/5 15/4 13/3 14/3 11/2 7/1

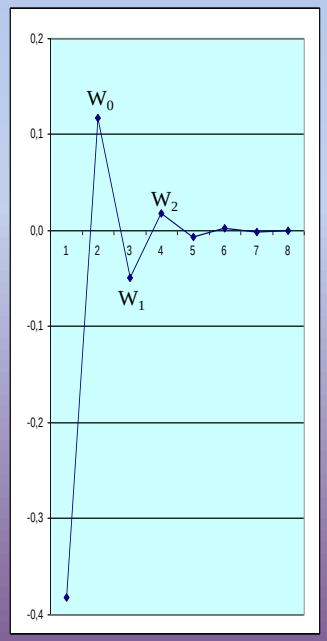
Die Farrey Folge im Lamdoma



Die Mediante führt auf den ersten Gitterpunkt einer Gleichtonlinie

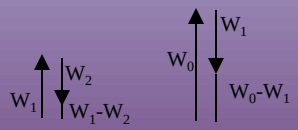
Die Konvergenzrate der Fibonaccibrüche

Wir wissen bereits, dass die Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen Näherungsbrüche ergeben, die sich immer mehr an den goldenen Schnitt annähern. Die Mathematiker haben sich Gedanken darüber gemacht, wie schnell diese Annäherung erfolgt. Sie haben dafür ein Maß geschaffen, die sogenannte Konvergenzrate. Es ist der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Abweichungen zweier Näherungsbrüche. Diese Konvergenzrate ist außerordentlich Bedeutsam bei der Betrachtung chaotischer Vorgänge. Sie besitzt, wie auch der Goldene Schnitt selbst den Charakter einer Naturkonstante vom Rang einer Feigenbaumkonstante.



Die Tabelle enthält alle Schritte zur Berechnung der Konvergenzrate, die sich aus den Näherungsbrüchen der Fibonaccizahlen ergeben. In der Grafik links sind die Abweichungen grafisch auf-getragen. Der Grenzwert des Quotienten von zwei aufeinander-folgenden Abweichungen W ist dann:

$$\boxed{\lim_{i\to\infty}\frac{W_i - W_{i+1}}{W_{i-1} - W_i} = g^2}$$



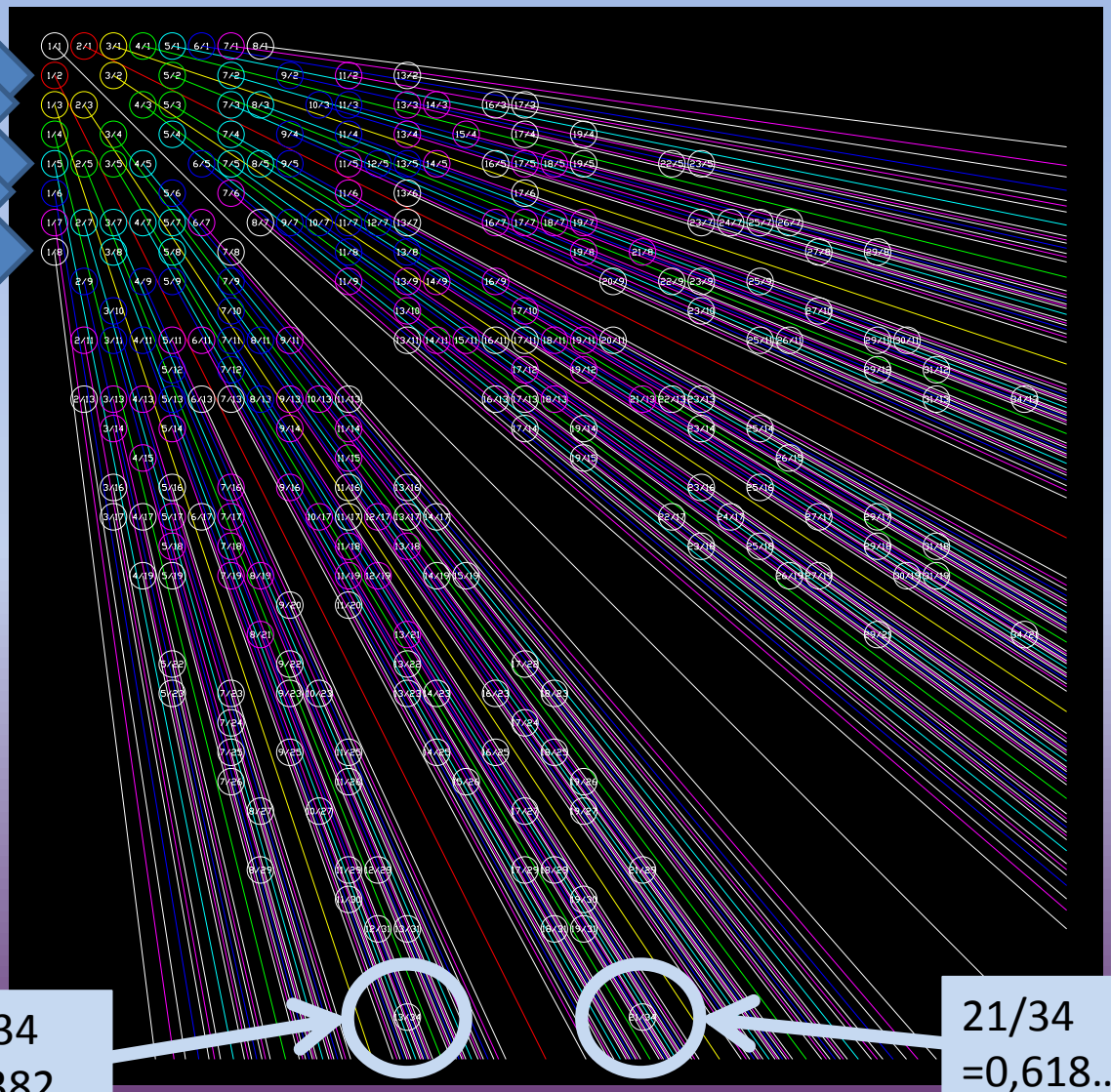
	Fibonacci-reihe Fi	Quotienten Fi/F1+1	Abweichung	Quotienten der Abweichungen
F0	0			
F1	1			
F2	1	1,00000000	-0,38196601	
F3	2	0,50000000	0,11803399	-0,30902
F4	3	0,66666667	-0,04863268	-0,41202
F5	5	0,60000000	0,01803399	-0,37082
F6	8	0,62500000	-0,00696601	-0,38627
F7	13	0,61538462	0,00264937	-0,38033
F8	21	0,61904762	-0,00101363	-0,38259
F9	34	0,61764706	0,00038693	-0,38173
F10	55	0,61818182	-0,00014783	-0,38206
F11	89	0,61797753	0,00005646	-0,38193
F12	144	0,61805556	-0,00002157	-0,38198
Werte mit 8.-Stelliger Genauigkeit		…	…	…
		0,61803399		**0,381966011**
		Goldener Schnitt		**Konvergenz-rate**

Abweichungen nähert sich dem Wert g^2.

Alle anderen Irrationalen Zahlen haben größere Konvergenzraten. Der goldene Schnitt wird daher als die irrationalste aller Irrationalen Zahlen bezeichnet. Er lässt sich am schlechtesten durch Aproximation annähern.

	Fibonacci-reihe Fi	Quotienten Fi/F1+1	Abweichung	Quotienten der Abweichungen
F0	0			
F1	1			
F2	1	1,00000000	-0,38196601	
F3	2	0,50000000	0,11803399	-0,30902
F4	3	0,66666667	-0,04863268	-0,41202
F5	5	0,60000000	0,01803399	-0,37082
F6	8	0,62500000	-0,00696601	-0,38627
F7	13	0,61538462	0,00264937	-0,38033
F8	21	0,61904762	-0,00101363	-0,38259
F9	34	0,61764706	0,00038693	-0,38173
F10	55	0,61818182	-0,00014783	-0,38206
F11	89	0,61797753	0,00005646	-0,38193
F12	144	0,61805556	-0,00002157	-0,38198
		...	...	...
Werte mit 8.-Stelliger Genauigkeit		**0,61803399**		**0,381966011**
		Goldener Schnitt		**Konvergenz-rate**
		g		**g^2**

1. Generation
2. Generation
3. Generation
4. Generation
5. Generation
6. Generation
7. Generation



g^2 13/34 =0,382…

21/34 =0,618… g

Eine kleine Variation der Farey-Folge

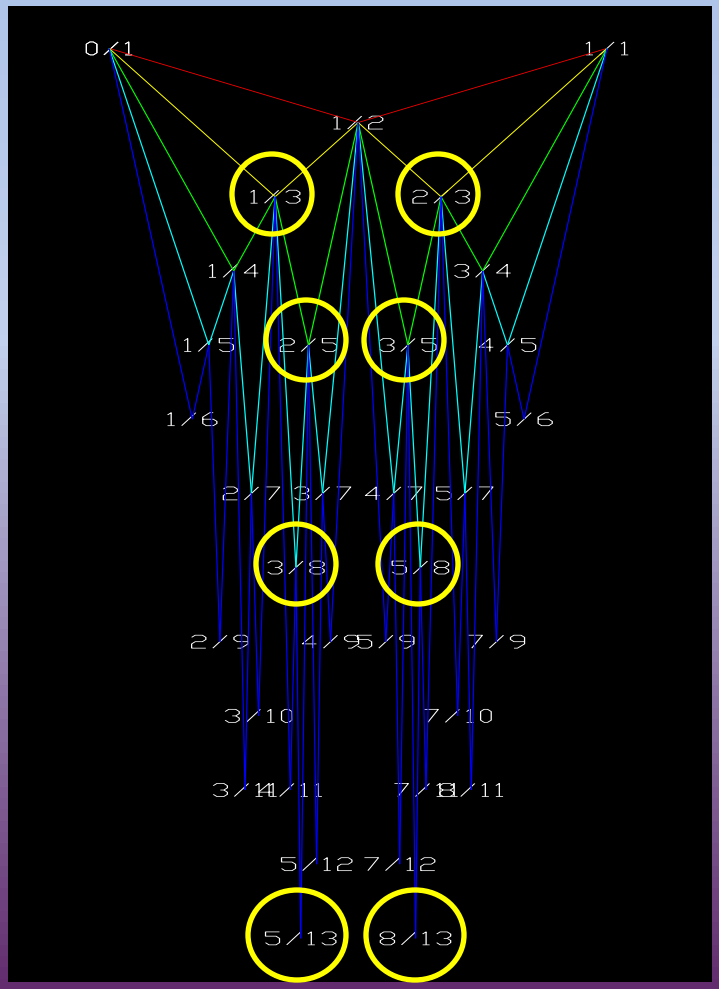
Die Brüche in unten stehender Grafik wurden je nach Nenner höher oder tiefer platziert, die Elternbrüche sind mit Linien verbunden. Es gehen beispielsweise vom Bruch 1/2, Linien zu den Elternbrüchen 0/1 und 1/1. Diese Form der Farey-Folge unterscheidet sich von der klassischen dadurch, dass alle Lücken zwischen den Elternbrüchen einer Generation gefüllt werden. Die Brüche jeder neuen Generation sind in unterschiedlichen Farben markiert. Die größten Nenner bilden die Fibonaccizahlen.

Die Farey-Folgen der 1. Bis 4.Generation

F_1={0/1, 1/1}
F_2={0/1, 1/2, 1/1}
F_3={0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1}
F_4={0/1,1/4,1/3,2/5,1/2,3/5,2/3,3/4,1/1}
Wenn bis zur 4. Generation alle Brüche gebildet werden, dann ist der maximale Nenner die 4. Fibonaccizahl. Dies gilt auch für alle weiteren Generationen

Die Fibonaccizahlen {1,1,2,3,5,8,13,..} finden sich wieder in Nenner und Zähler der Farey-Folge. Wenn zwei Werte der Fibonacci-Reihe aufeinander folgen, dann entstehen durch fortwährende Addition nur noch Werte der Fibonacci-Reihe.

g^2 13/34 =0,382…



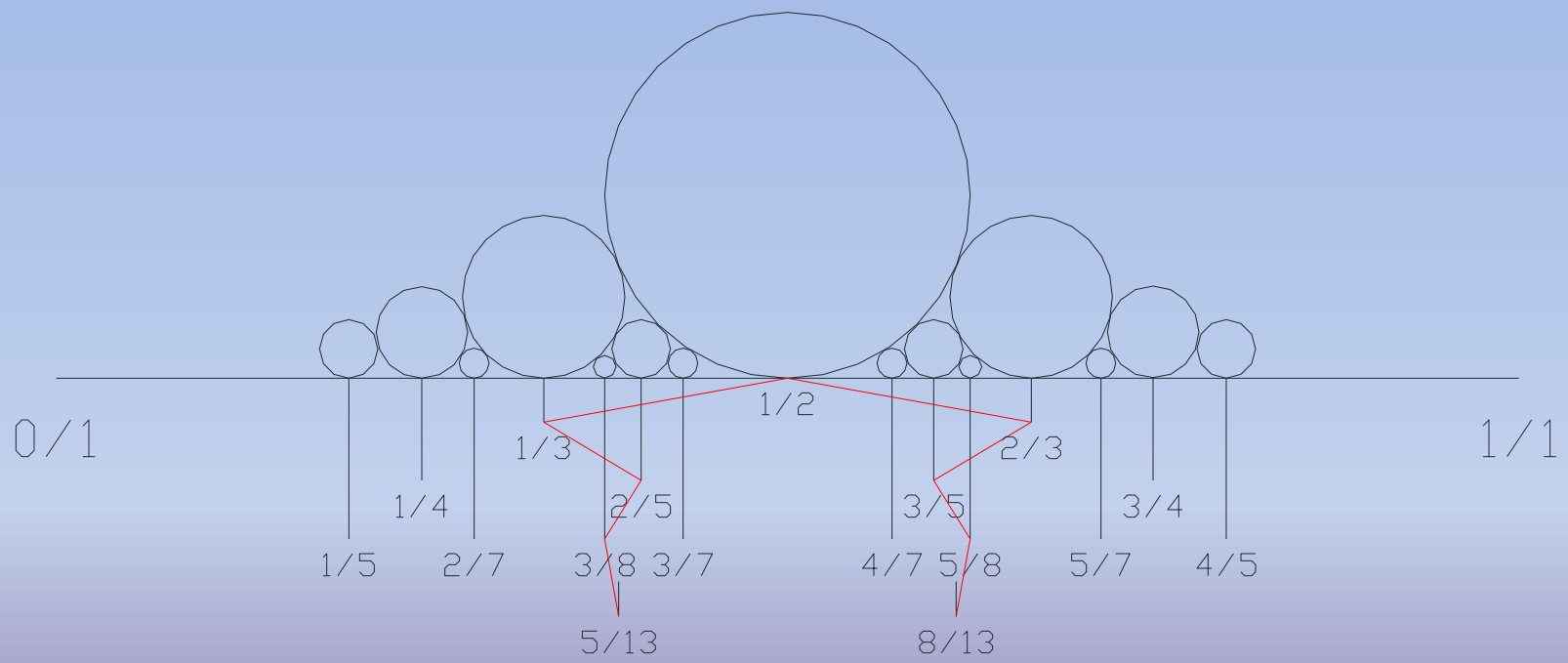
Standardform der Farey-Folge

F_4={0/1,1/4,1/3, ,1/2, ,2/3,3/4,1/1}

In der Standardform der Farey-Folge fehlen in der 4. Generation die Brüche 2/5 und 3/5.
Es treten nur die Nenner 1-4 auf.
Dies gilt auch für alle weiteren Generationen

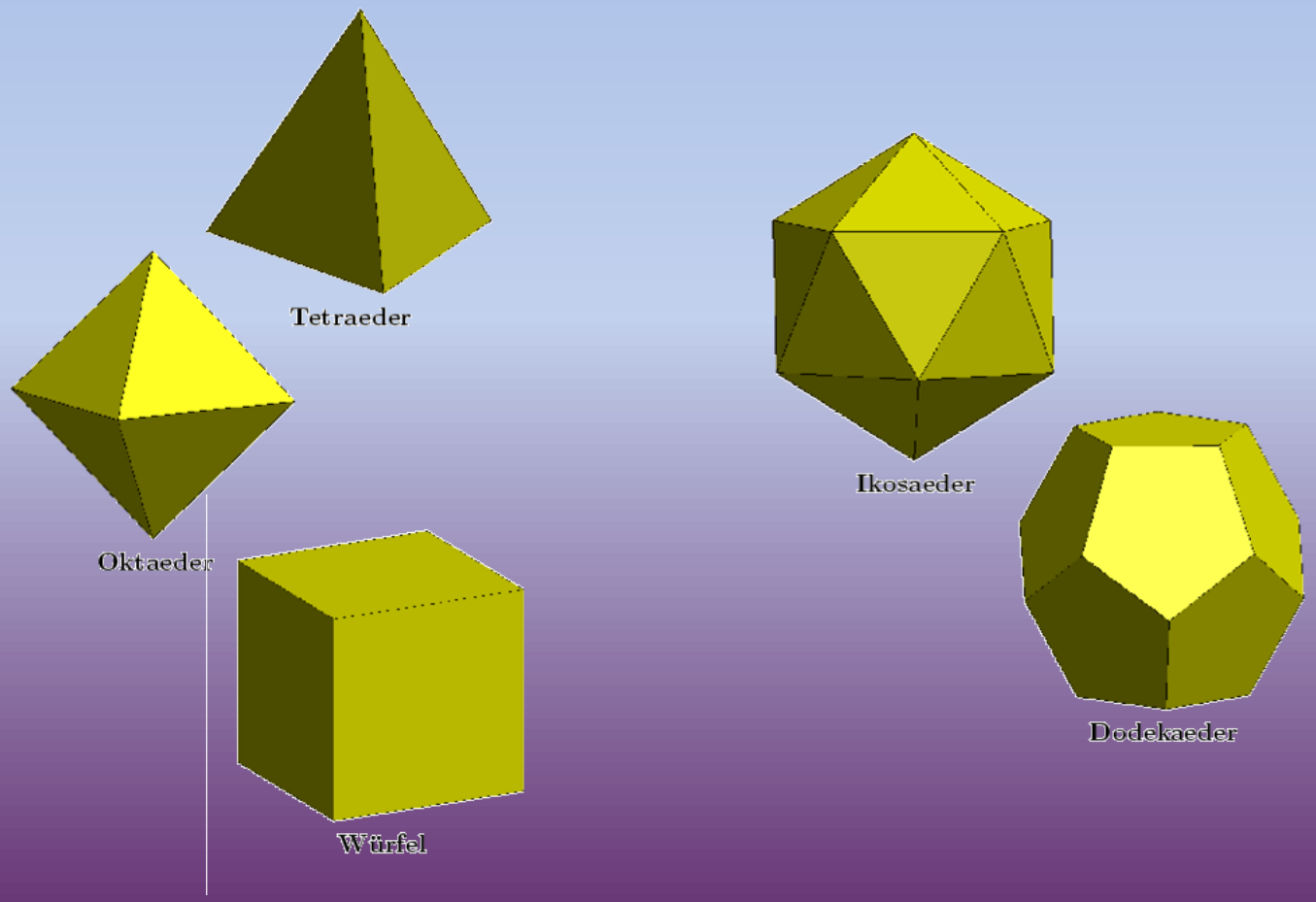
Die gelb markierten Brüche haben in Nenner und Zähler Fibonaccizahlen. Sie nähern die Werte des goldenen Schnitts g=0,618... und g^2 =0,381... an.

21/34 =6,176… g



g^2 g

Reguläre Polyeder
Die platonischen Körper



Reguläre Polyeder
Die platonischen Körper

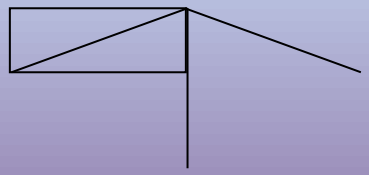
Ikosaeder

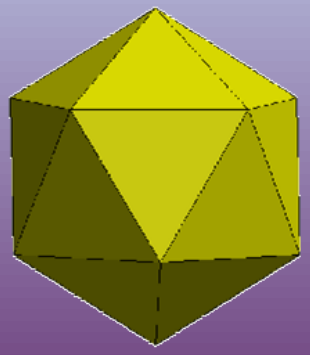
Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist $1/g^2$

Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten

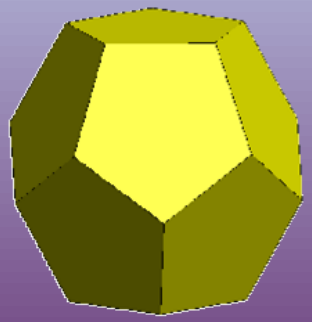
Pentadodekaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist 1/g. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten

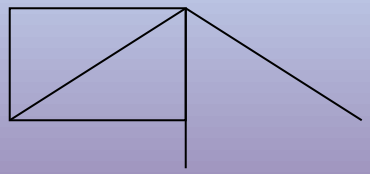




Ikosaeder



Dodekaeder



Die Farrey -Folge und die Ordnung der Platonischen Körper

Die Farreyfolge hat die Eigenschaft, daß Kreise mit dem Radius R=1/(2*Nenner$^{2)}$ sich berühren, wenn sie Maßstäblich zwischen 0 und 1 platziert werden. Siehe Harrald Scheid, S82, Zahlentheorie,Wissenschaftsverlag, 1991 (Siehe Elektronenschalenbesetzung)

Das Bildungsgesetz der Fibonacci- Folge entspricht dem der Farrey-Folge. Bei entsprechenden Anfangswerten muss die Fibonacci-Folge und somit der „Goldene Schnitt“ entstehen.

rechts oben Rot eingezeichnete Zickzacklinien markieren die Fibonacci Reihe.

Es gibt in jeder Ferey-Folge zwei Werte, welche der Fibonacci Folge entsprechen. Zwei benachbarte Ferey-Folgen enthalten benachbarte Elemente der Fibonacci-Folge.

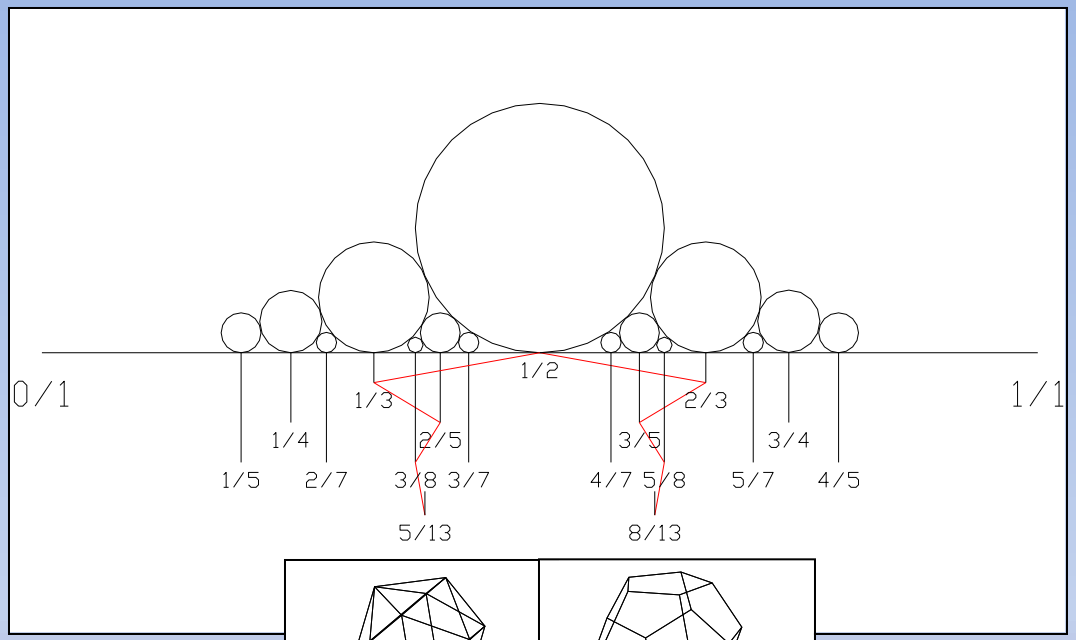
Das heißt, die Fibonacci-Folge ist Bestandteil der Menge aller Farrey-Folgen.

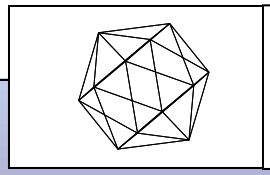
Im Bild rechts sind alle Brüche als Kreis markiert, bei denen Nenner und Zähler Mitglied der Fibonacci Folge sind, dabei sind die beiden Pfade welche symmetrisch zu 1/2 angeordnet sind, (rot eingezeichnet) die einzigen Vollständigen Fibonacci-Folgen, die in der Menge aller Farrey-Folgen enthalten sind.

Sie haben die Grenzwerte:**g, g^2**

Diese sind charakteristisch für den Pentadodekaeder und den Ikosaeder „Wunderbare Ordnung“

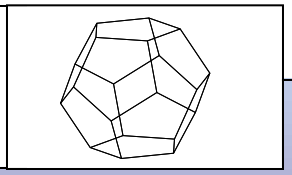
(g=0.618033...)





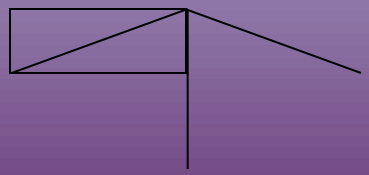
Ikosaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist 1/g^2 Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten

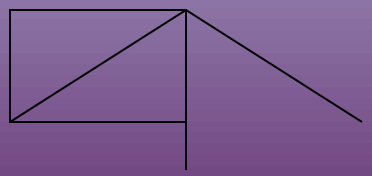


Pentadodekaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist 1/g. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten



Der Tangens des Neigungswinkels zweiwer Ikosaederflächen ist Tan(1/g^2). D.h. die Diagonalen eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis 1 zu g^2 haben denselben Winkel.

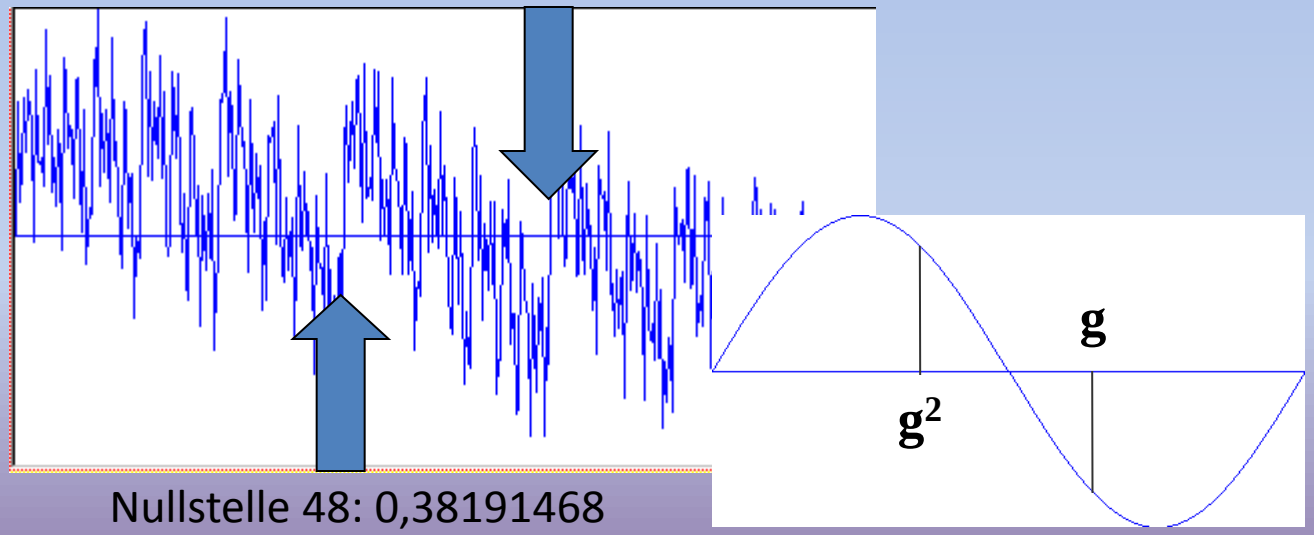


Der Tangens des Neigungswinkels zweiwer Pentadodekaederflächen ist Tan(1/g). D.h. die Diagonalen eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis 1 zu g^2 haben denselben Winkel.

Das Fibonacci Spektrum

Ein Spektrum bestehend aus den Frequenzen der Fibonacci Reihe
Dargestellt sind die ersten 15 Terme
sin(x)+sin(x)+sin(2*x)+sin(3*x)+sin(5*x)+sin(8*x)+...+sin(987*x)
Je größer die Anzahl der Terme um so mehr nähern sich die markanten Nullstellen den Werten g und g^2

Nullstelle 86: 0,61808532



Nullstelle 48: 0,38191468

Die exakten Werte

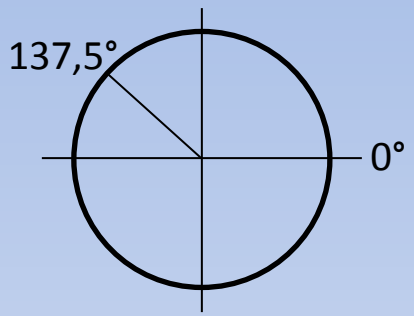
g^2=0,3819660...

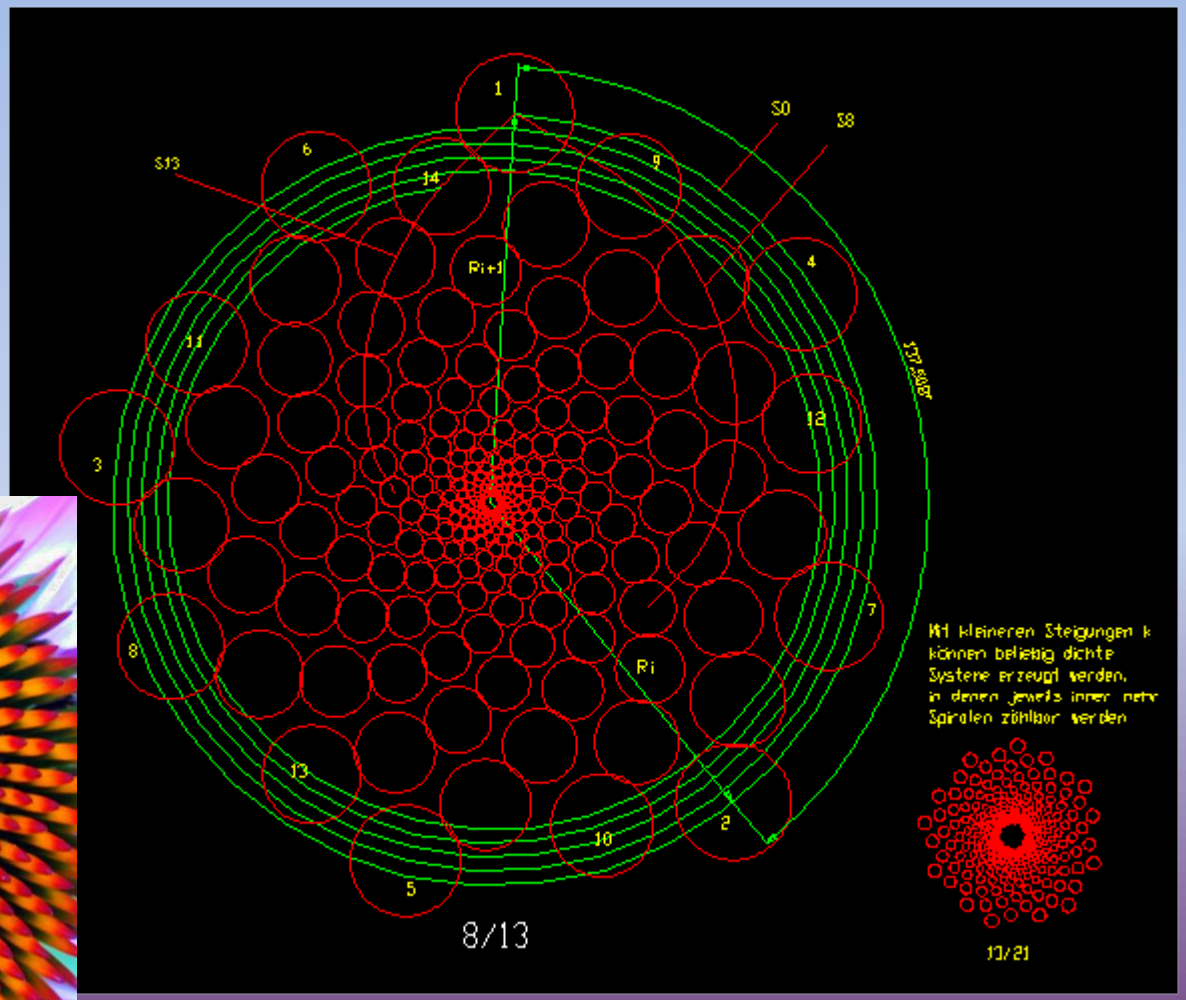
g=0,6180339...

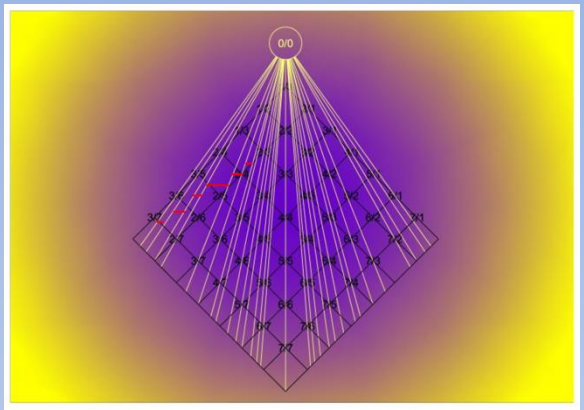
g * 360 =222,5°

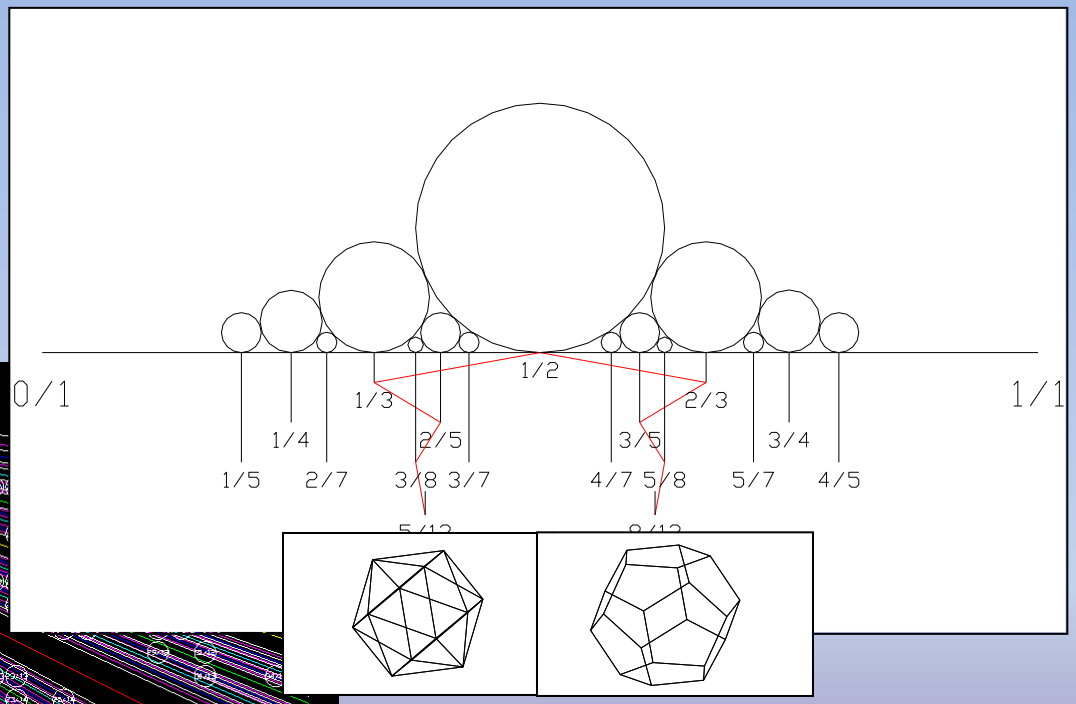
g^2 * 360 =137,5°

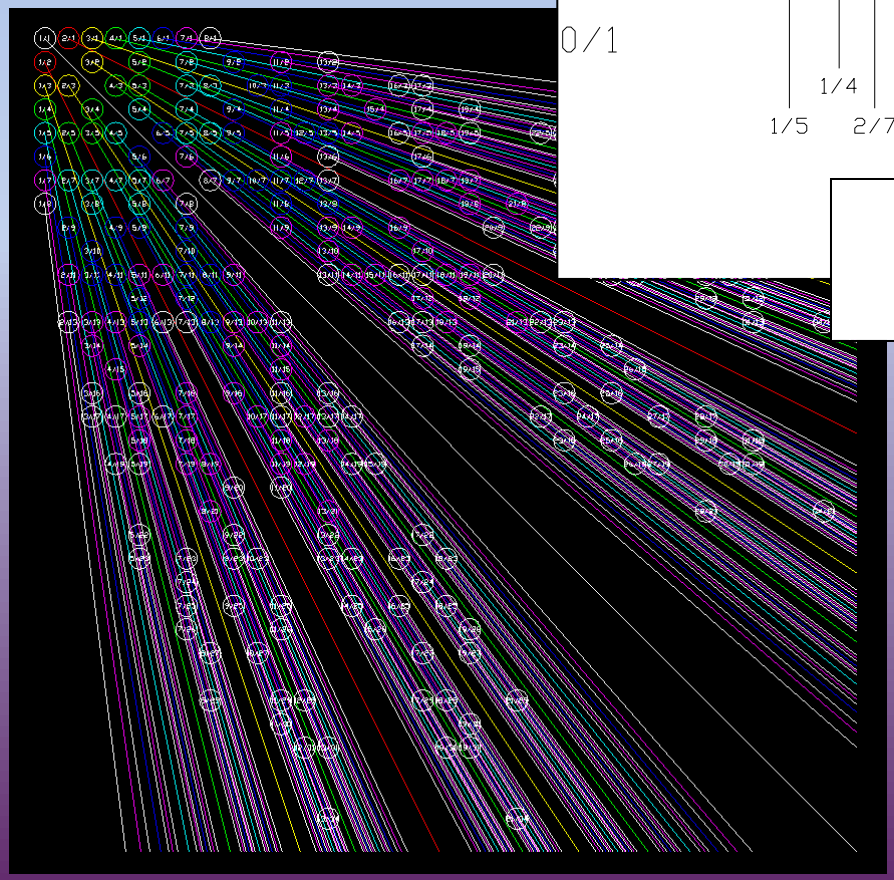
Summe =360°

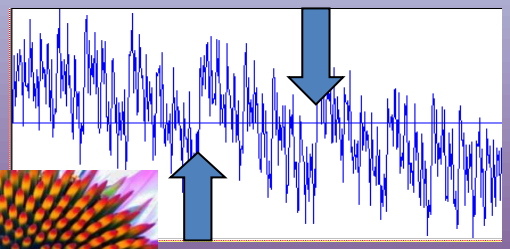


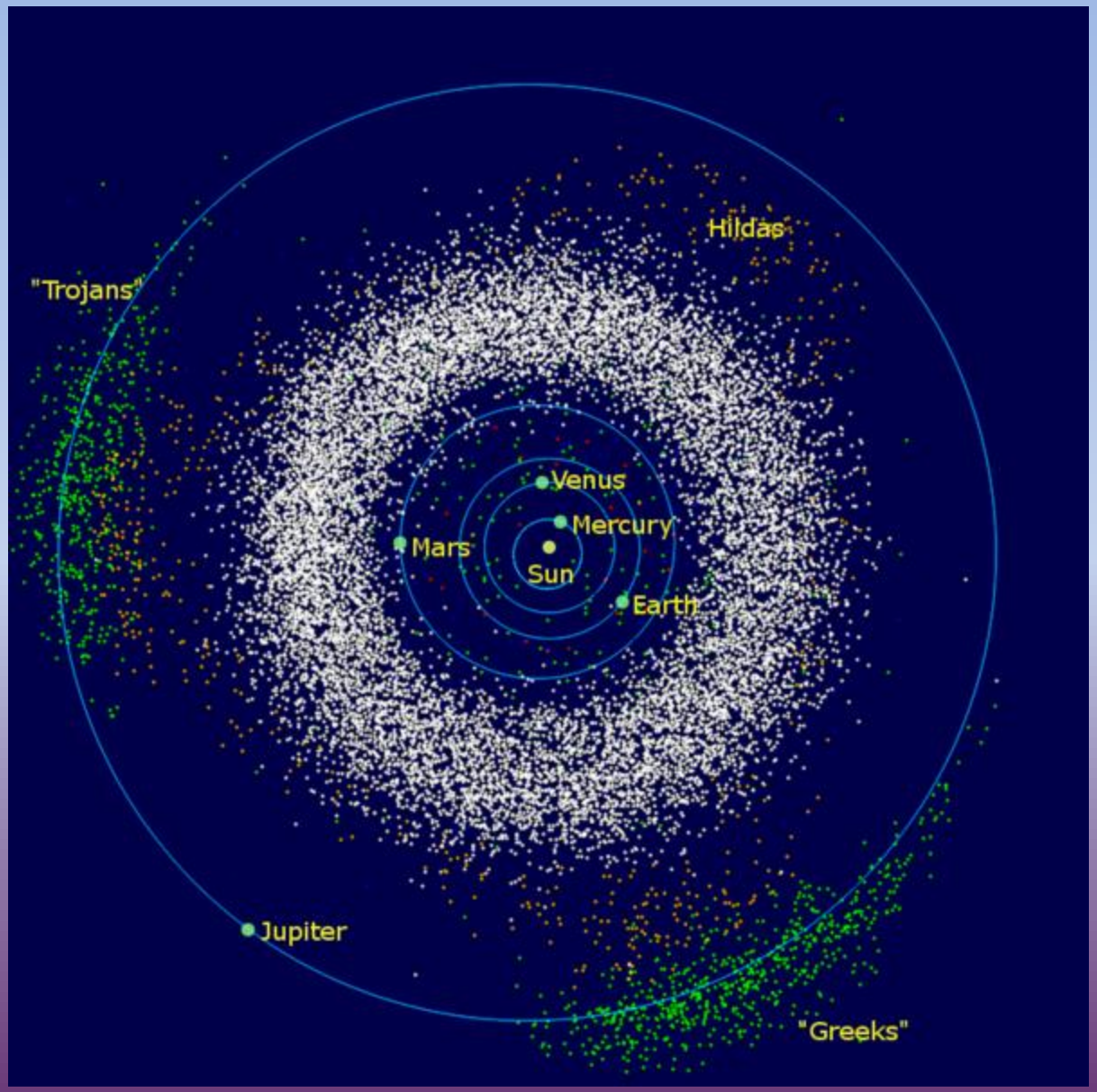



0/0

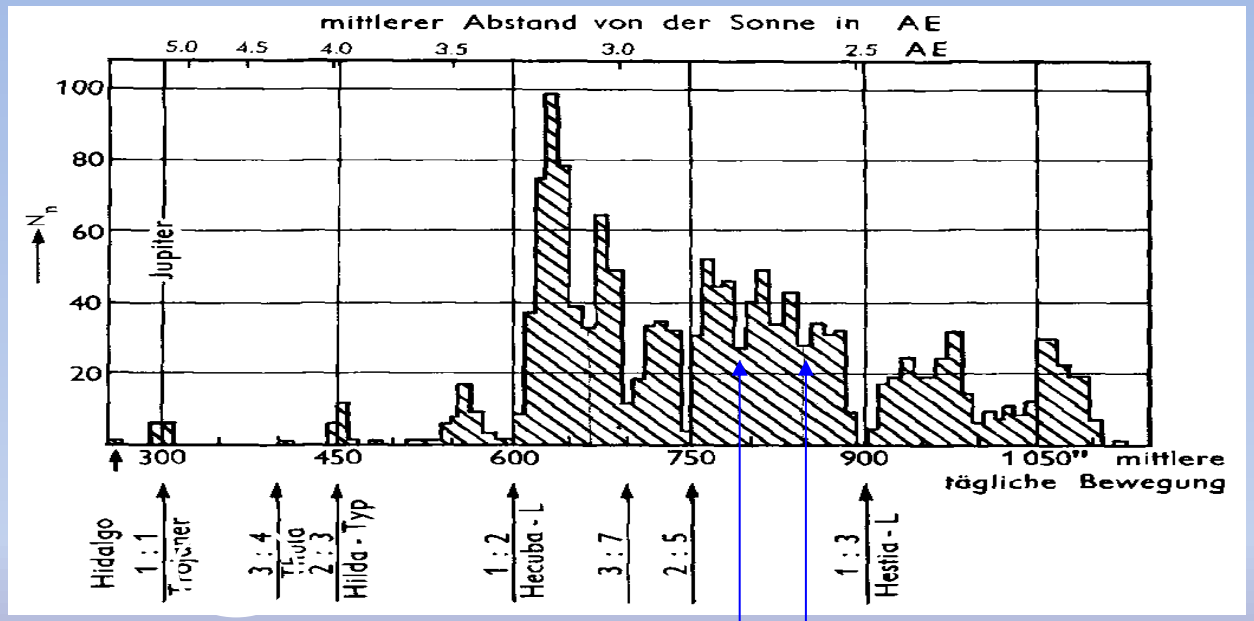

0/1
1/2
1/1
1/3
2/3
1/4
3/4
1/5
2/5
3/5
4/5
2/7
3/7
4/7
5/7
3/8
5/8

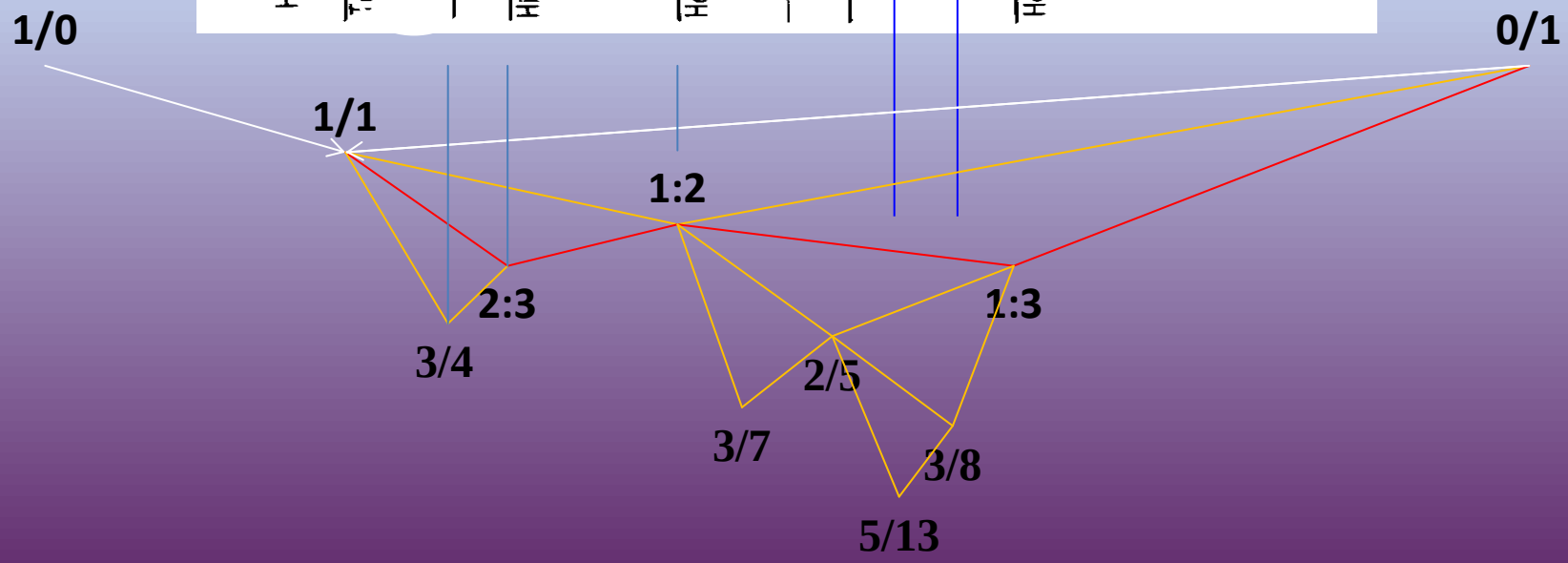





Hildas
"Trojans"
Venus
Mercury
Mars
Sun
Earth
Jupiter
"Greeks"

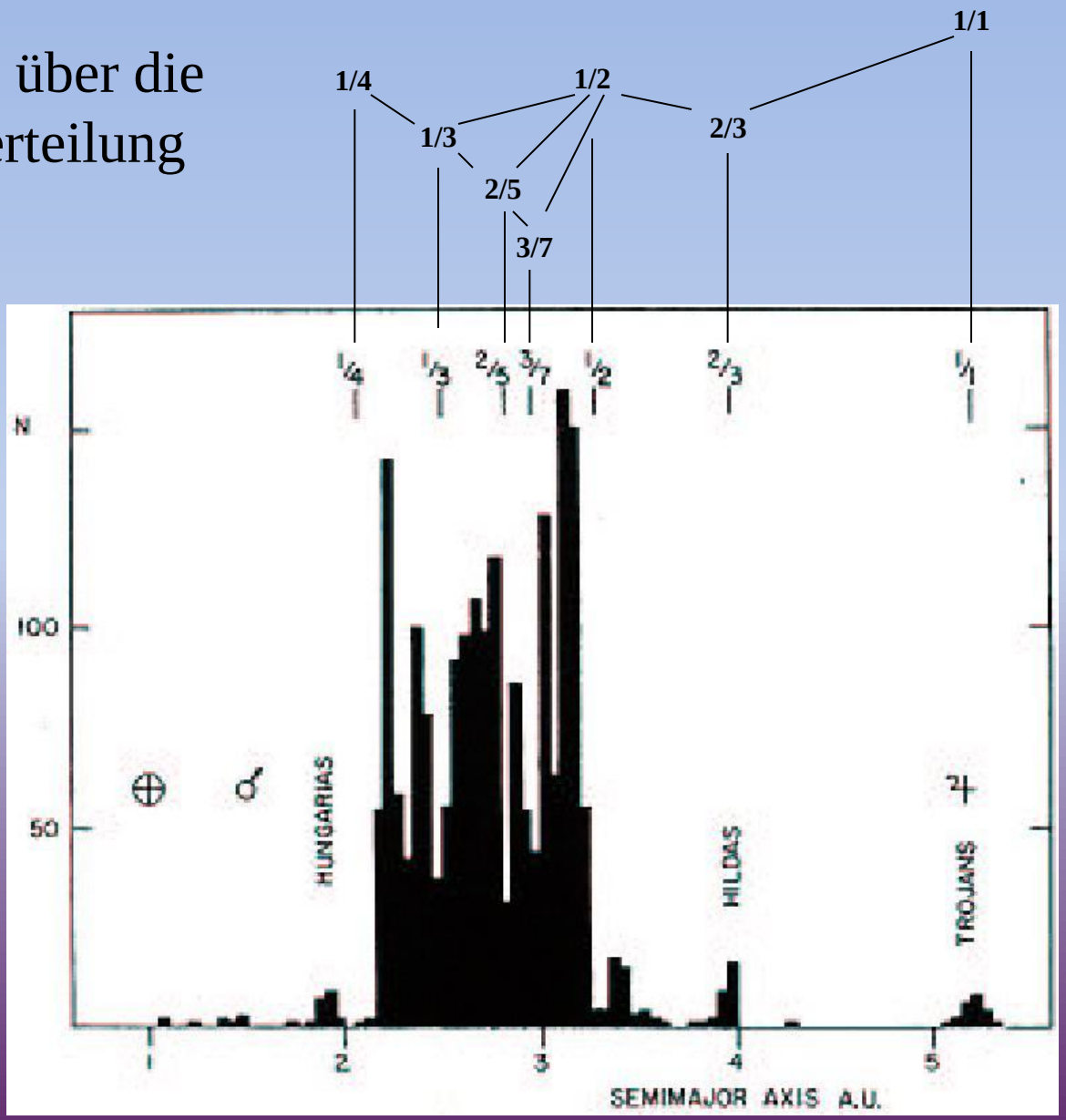
Die Farreyfolge und die Planeoiden





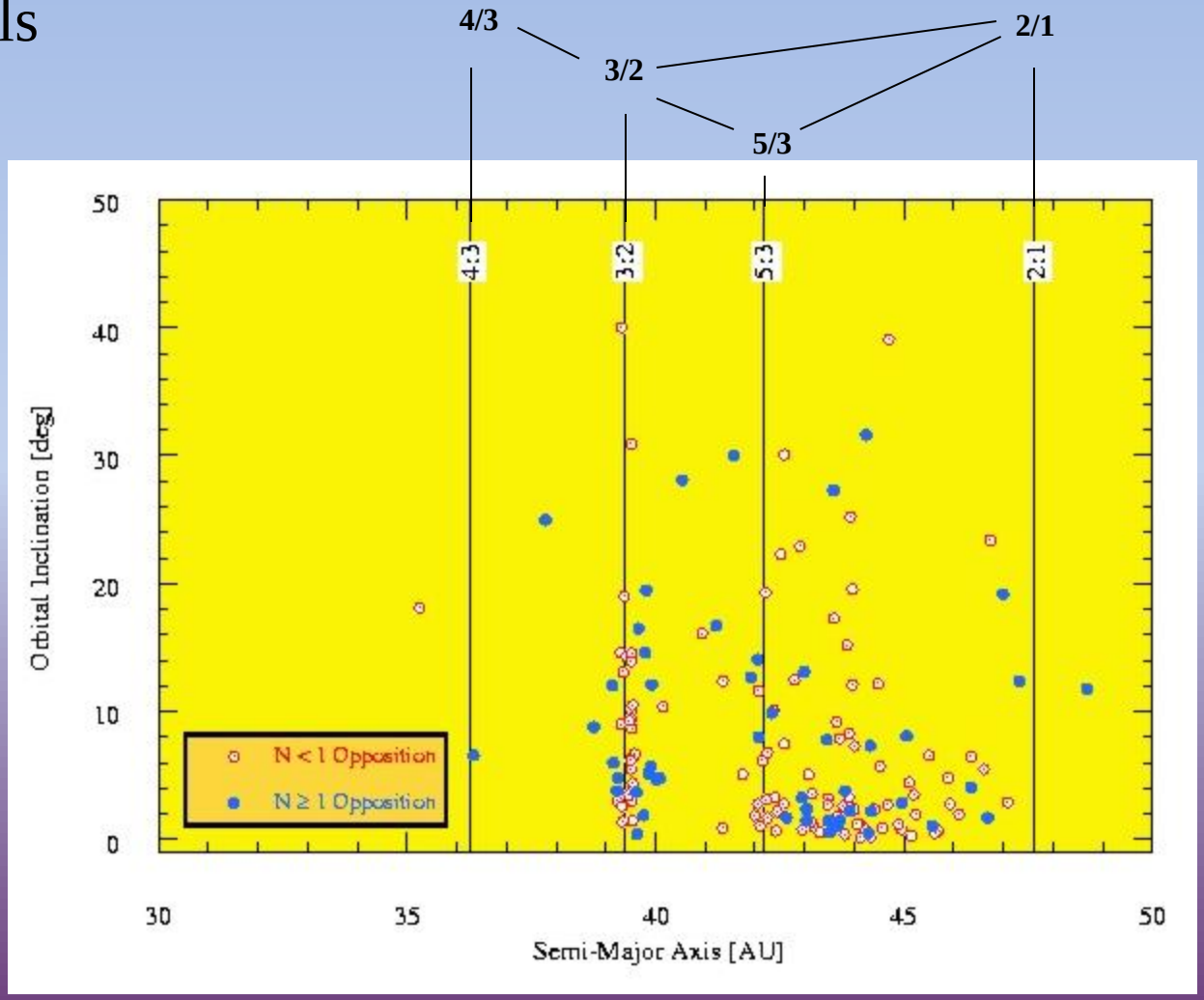
Eine weitere Untersuchung über die Planetoidenverteilung

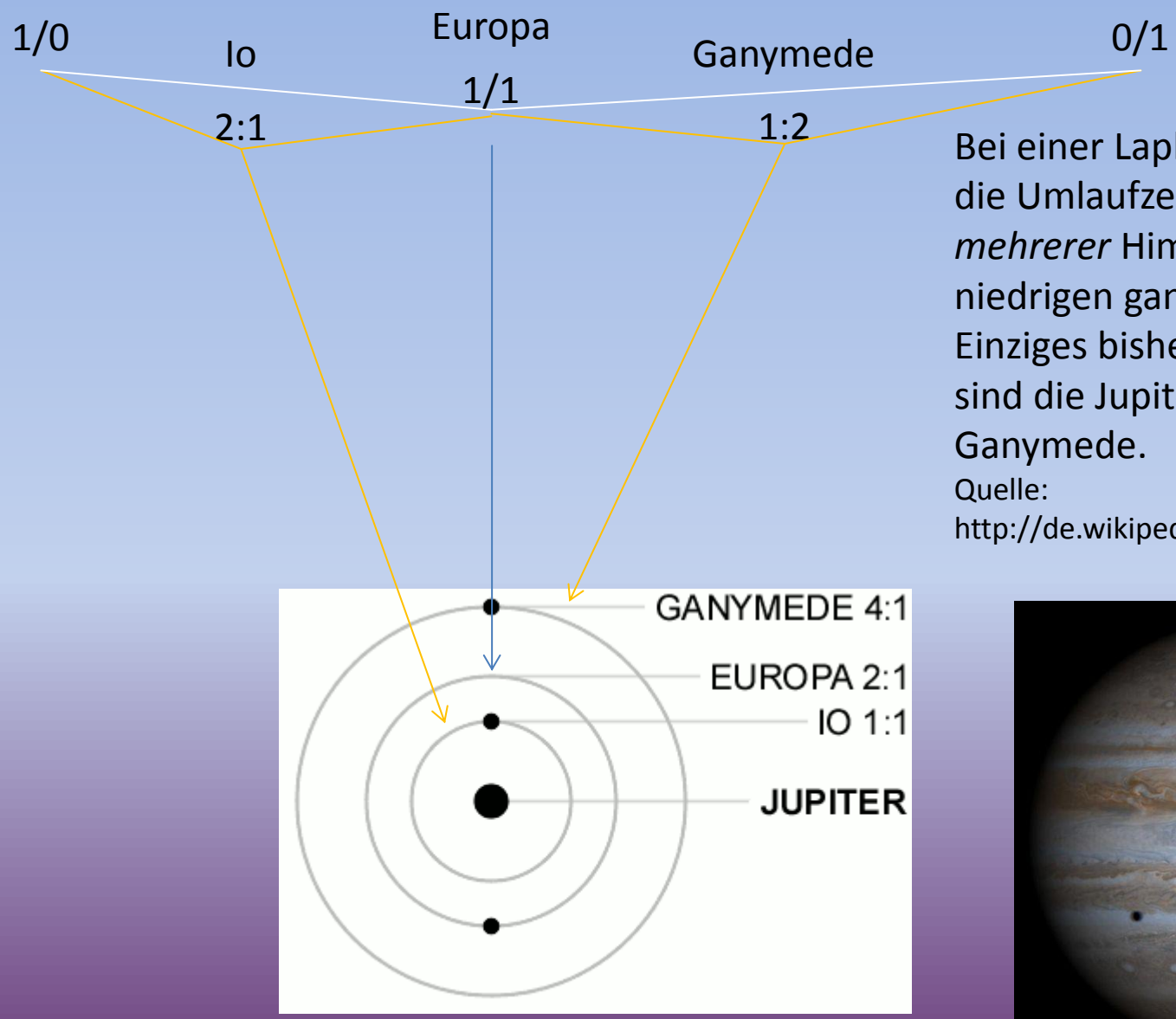
Die bezeichneten Lücken in der Verteilung der Planetoiden zwischen Mars und Jupiter lassen sich durch Addition von Zähler und Nenner ableiten. Es handelt sich also auch hier um die Glieder der ersten Farreyfolgen.Wie bei der vorigen Grafik, sieht man auch hier, dass die Jupiternahen Bereiche durch Frequenzkoppelung (Frequnenc Locking) in ihren Bahnen gehalten werden. Vermutlich handelt es sich bei den Restbeständen in den äußeren Lücken um massereiche Objekte, wodurch ein stärkerer Koppelungseffekt zur Koppelug führt.



Untersuchung des Kuipergürtels

Der Kuipergürtel befindet sich außerhalb der Neptunbahn und besteht ebenfalls aus zahllosen Kleinplaneten. Auch hier konnten Anhäufungen entdeckt werden, die sich ebenfalls durch Addition von Zähler und Nenner in einfachen rationalen Verhältnissen zur Neptunbahn sammeln.



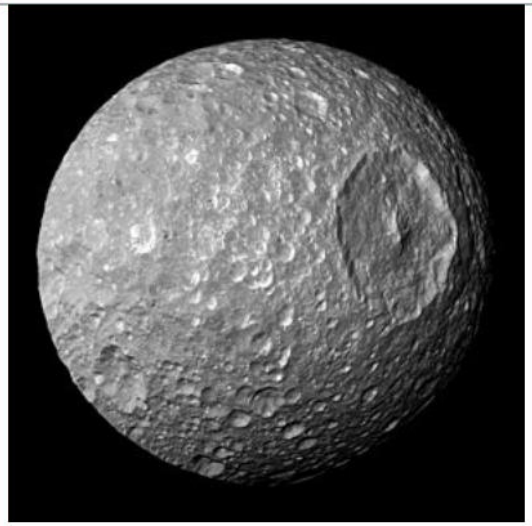


Bei einer Laplace-Resonanz stehen die Umlaufzeiten *dreier oder mehrerer* Himmelskörper in einem niedrigen ganzzahligen Verhältnis. Einziges bisher entdecktes Beispiel sind die Jupitermonde Io, Europa, Ganymede.

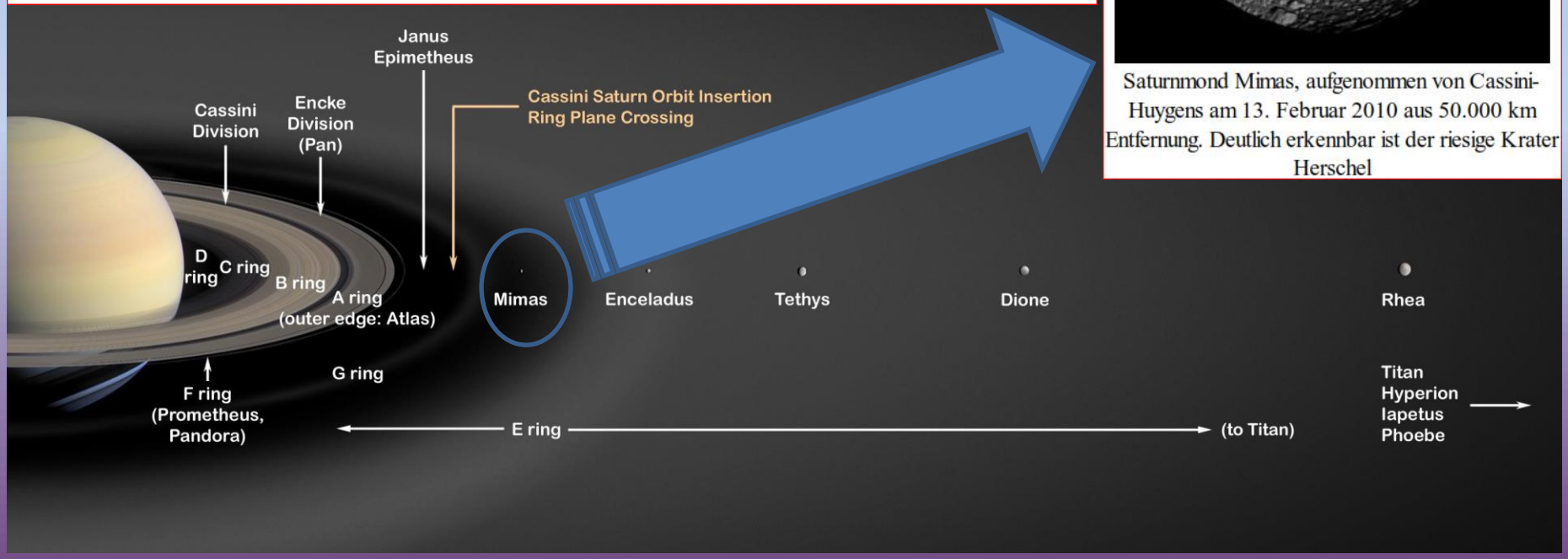
Quelle:
http://de.wikipedia.org/wiki/Bahnresonanz

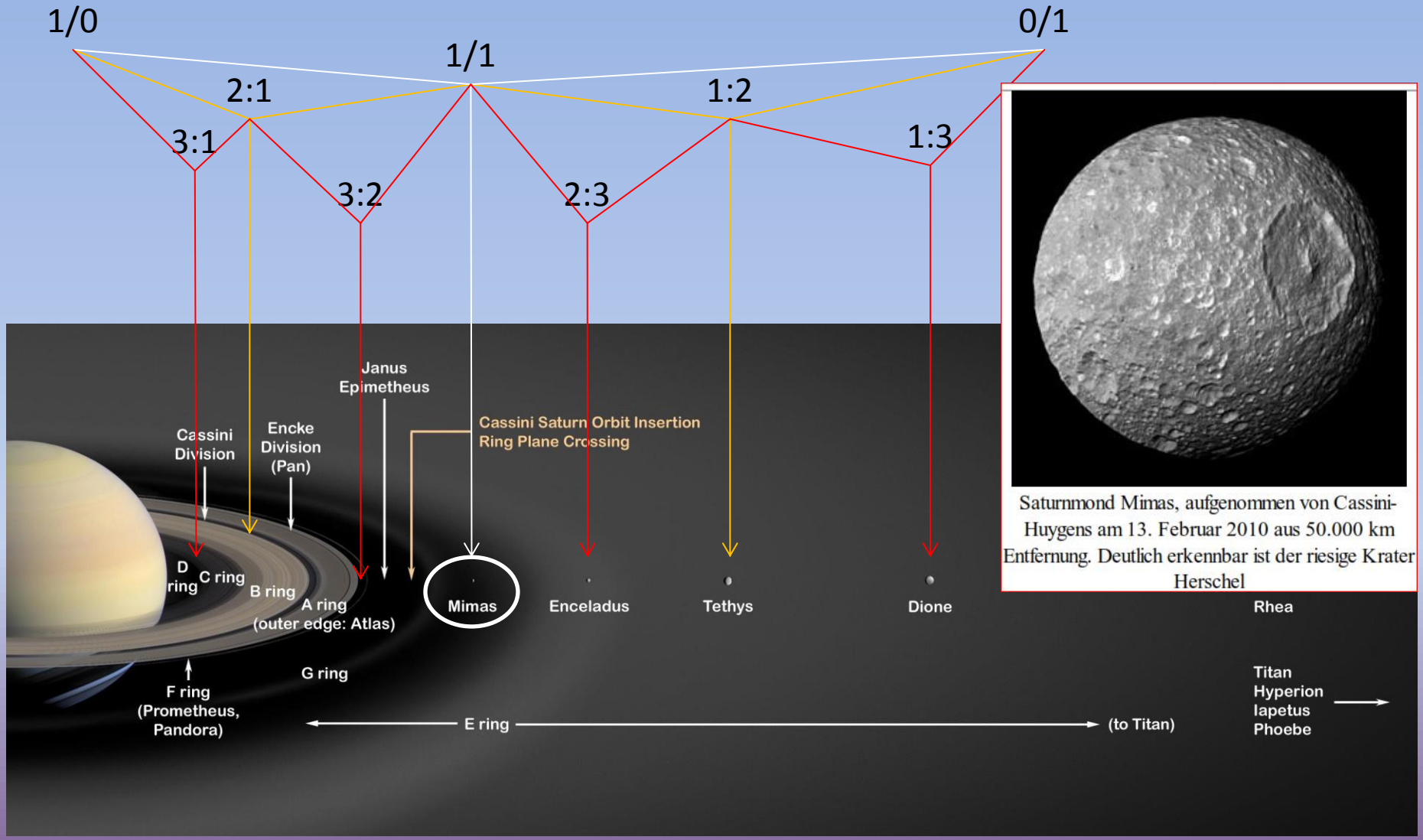
Mimas hat durch eine Reihe verschiedener Bahnresonanzen einen erheblichen Einfluss auf seine Nachbarschaft. Er ist durch seine Schwerkraft dafür verantwortlich, dass die 4.800 km breite Cassinische Teilung, die den A-Ring vom B-Ring trennt, weitgehend frei von Ringmaterial bleibt. Mimas besitzt offensichtlich genug Masse, um die Teilung leer zu halten, obschon bei naher Betrachtung immer noch kleine Teilchen vorhanden sind, die Cassinische Teilung also nur aus der Ferne dunkel und leer erscheint. Die Teilchen in der *Huygens-Lücke* innerhalb der Teilung weisen eine 2:1-Bahnresonanz mit Mimas auf. Sie werden wiederholt von Mimas in immer der gleichen Richtung angezogen, wodurch sie auf eine äußere Bahn geraten. Die Grenze zwischen dem B- und C-Ring befindet sich in einer 3:1-Resonanz mit Mimas.

Der Mond befindet sich zudem in einer 2:3-Resonanz mit dem F-Ring-Schäfermond Pandora sowie einer 7:6-Bahnresonanz mit seinem inneren Nachbarn Aegaeon und dem G-Ring – dessen innere Ringkante sich etwa 15.000 km innerhalb der Umlaufbahn von Mimas erstreckt – wobei Mimas eine Pendelbewegung von Aegaeons Großer Bahnhalbachse verursacht, die während einer geschätzten Periode von 4 Jahren etwa vier Kilometern abweicht.



Saturnmond Mimas, aufgenommen von Cassini-Huygens am 13. Februar 2010 aus 50.000 km Entfernung. Deutlich erkennbar ist der riesige Krater Herschel





Saturnmond Mimas, aufgenommen von Cassini-Huygens am 13. Februar 2010 aus 50.000 km Entfernung. Deutlich erkennbar ist der riesige Krater Herschel

Victor Goldschmidt

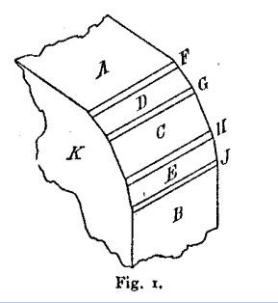
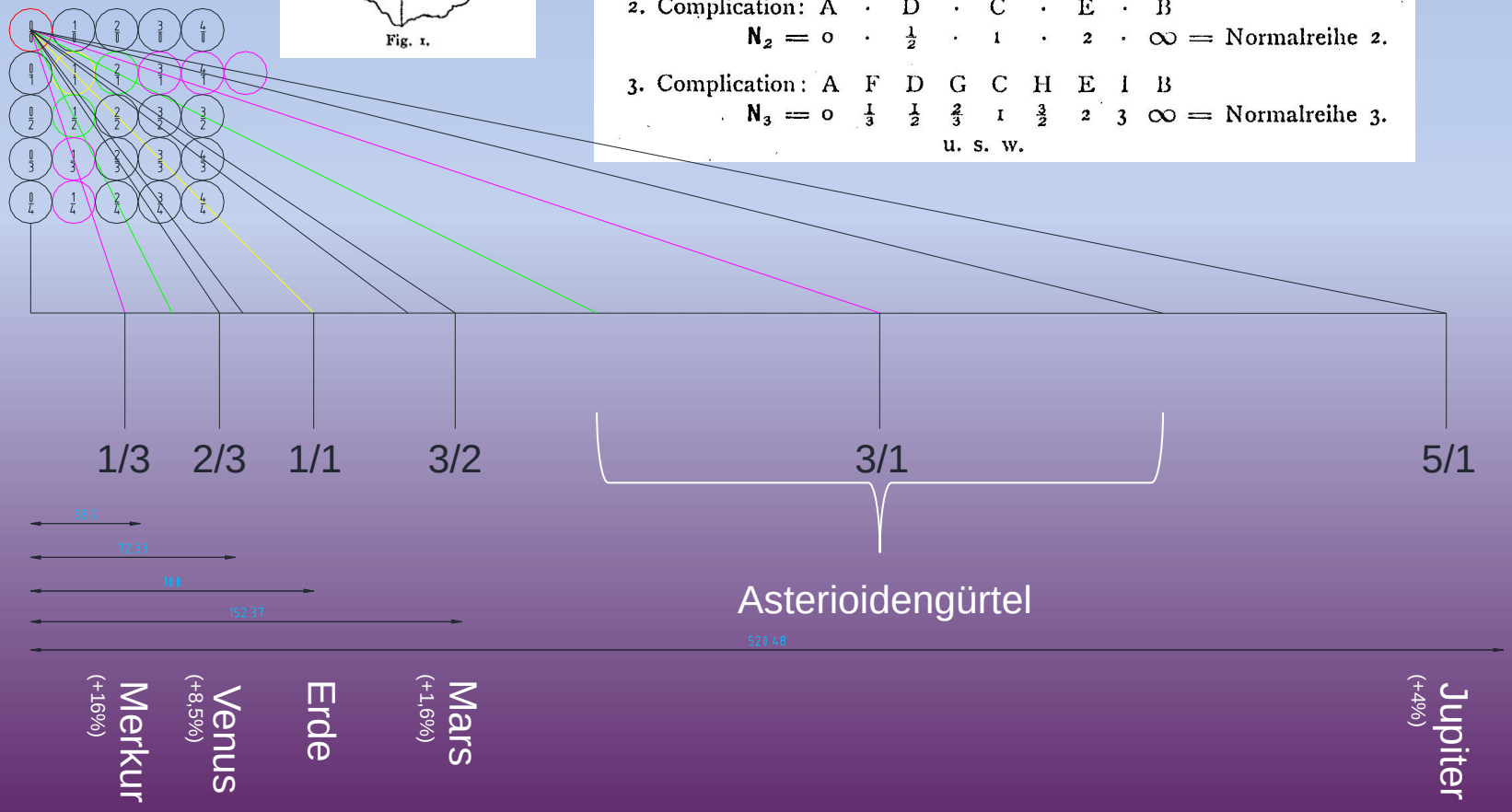


Fig. 1.

Primärflächen:	A	·	·	·	·	·	·	·	B	
$N_0 =$	0	·	·	·	·	·	·	·	∞	= Normalreihe 0.
1. Complication:	A	·	·	·	C	·	·	·	B	
$N_1 =$	0	·	·	·	1	·	·	·	∞	= Normalreihe 1.
2. Complication:	A	·	D	·	C	·	E	·	B	
$N_2 =$	0	·	$\frac{1}{2}$	·	1	·	2	·	∞	= Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	I	B	
$N_3 =$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞	= Normalreihe 3.

u. s. w.



Das Dodekaeder verbindet Platon mit der quinta essentia, dem Himmelsäther.
Jeder
der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder
(Timaios 55c)