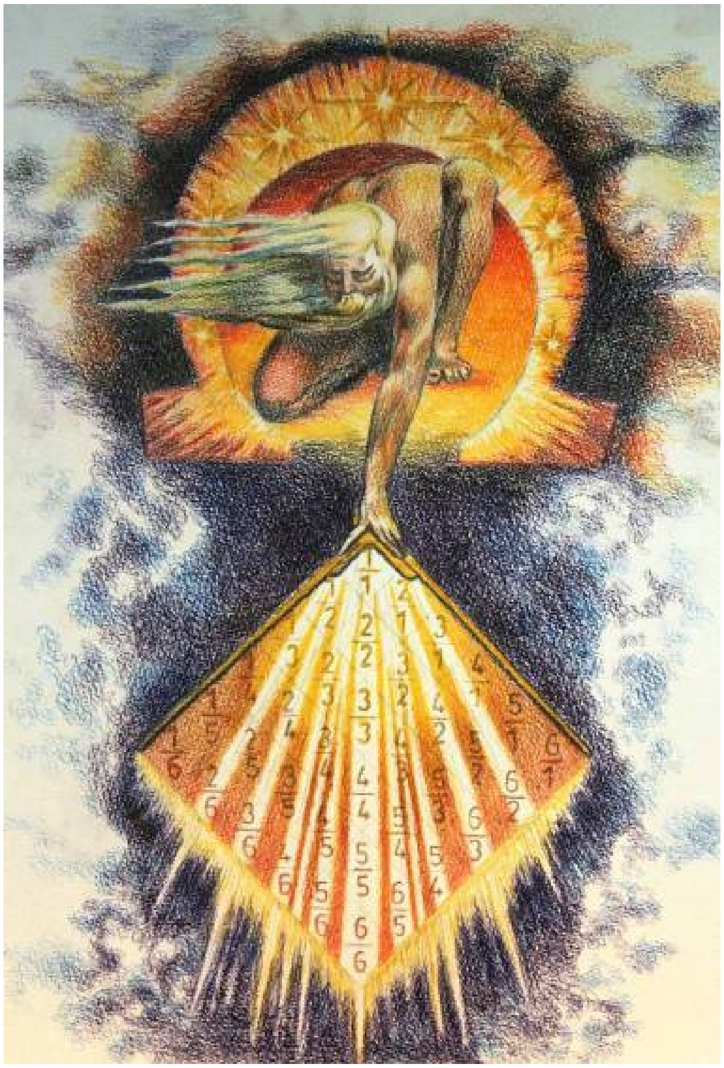


Vom Klang der Geometrie

Vortrag auf den Harmoniksymposium 2012 in Nürnberg
Autor: Willibald Limbrunner[1]

[1] Titelgrafik des Autors, nach einem Bild von William Blake. E-Mail: w.limbrunner@gmx.de

Vorwort:

In diesem Werk lege ich den Lesern, welche an einer neuen philosophischen Orientierung interessiert sind, ein Lehrbuch für eine Lehre vor, die, im klassischen Altertum unter dem Namen Pythagoreismus existierend, in der Folgezeit nur noch sporadisch auftritt und in unserem heutigen Weltbild vorläufig noch keine Existenz hat.

So lauten die ersten Worte des Lehrbuchs der Harmonik, von Hans Kayser. Wir erahnen hinter dem Komplex der grammatikalischen Wendungen, was uns Hans Kayser vorlegt. Das Werk erschien 1950 im Occident Verlag. Liest man es, so bemerkt man, zunächst den Kunst- und Musiktheoretiker. Für meinen Geschmack zu weitschweifig und veraltet im Sprachstil, manchmal belehrend. Dennoch breitet Hans Kayser hier, in kongenialer Weise eine Lehre aus, die aus einer längst vergangenen Epoche stammt. Sicher, Pythagoras hat uns praktisch nichts schriftlich hinterlassen, dennoch erreicht uns seine Lehre aus Hans Kaysers Worten in der Sache über zweieinhalb Jahrtausende hinweg und sie fasziniert. Fasziniert nicht vom Stil des Lehrbuschs, nicht in Gänze vom Inhalt des Lehrbuchs, sondern von den Filetstücken, die man sich aus Kaysers Lehrbuch herausgreifen mag, wenn man über all die Unzulänglichkeiten hinweg sieht. Unzulänglichkeiten nicht nur von Sprachstil, sondern auch vom Inhalt, der zu weit gegriffen erscheint, teilweise unseriös wirkende Analogien präsentiert.
Sieht man über all das hinweg, so finden wir in Kaysers Lehrbuch den Nachhall eines Titanen, dessen Name untrennbar mit dem Lehrsatz über rechtwinkelige Dreiecke bekannt ist.
Welche Menschen haben eine Wirkung, die über Jahrtausende nachhallt? Jesus, Buddha, Laotse, …
Pythagoras war nicht Mathematiker, sondern ein charismatischer und Weisheitslehrer, dessen Name bei einigen der großen Physiker wie Werner Heisenberg und Carl Friedrich von Weizsäcker größten Respekt genießt.
Was macht die pythagoreische Lehre, wie sie Kayser aufschlüsselt so interessant und was ist Inhalt der Sache, in der ich den Nachhall eines Titanen sehe? Werner Heisenberg schreibt in „Der Teil und das Ganze“:

> … Nach dieser Vorstellung konnten die stationären Zustände einer Atomhülle den stehenden Schwingungen eines Systems, zum Beispiel einer schwingenden Saite, verglichen werden; wobei allerdings die Größen, die man sonst als Energien der stationären Zustände betrachtet hatte, hier als Frequenzen der stehenden Schwingungen erschienen.[2]

[2] Heisenberg, Werner; Der Teil und das Ganze, Piper Verl., 8.Aufl. 2010, S.89

Die schwingende Saite ist das zentrale Feld um die sich die pythagoreische Lehre, wie sie Kayser für uns neu aufschlüsselt, rankt.
Ein weiterer elementarer Begriff der Harmonik ist damit verbunden, die Ganzzahligkeit. Diesen Begriff hat die Quantenphysik, aber auch die Elementarteilchenphysik neu geschaffen und heißt nun Quantisierung. Das ganzzahlige Verhältnis der Intervalle, die aus der schwingwenden Saite resultieren ist nun als Grundlage der Materie und somit, wenn man so will, auch der Welt, bewiesen.

> Die Quantisierung der Energieniveaus bewirkt auch die Gleichförmigkeit der Natur.
>
> Wenn die Bahnen der Elektronen um den Zentralen Atomkern durch die klassische Newtonsche Mechanik beschrieben würden, könnte das Elektron den Kern auf einer Bahn mit *beliebigem* Radius umkreisen, wenn es nur die geeignete Geschwindigkeit hätte. Ein Elektron könnte dann praktisch immer, wenn es auf einer Bahn um ein Proton gebunden ist, eine andere Geschwindigkeit und einen anderen Bahnradius haben. Jedesmal ergäbe sich folglich eine andere Konfiguration, und jedes Wasserstoffatom wäre anders.[3]

Die Welt heute ist eine Welt der Wissenschaft, der Beweisbarkeit, der Sachlichkeit, nicht zuletzt, der Wirtschaftlichkeit. Die Kluft, welche die klassische Physik gerissen hat ist tief, wenn wir sie auch kaum bewusst wahrnehmen. In dieser klassischen Physik gibt es nichts von dem, was uns vertraut ist. Die klassische Physik kennt Energie, Masse, Zeit und Bewegung. Die menschliche Dimension kann alleine in diesen vier Messgrößen nicht existieren. Unser Gehirn wird als biologische Entität begriffen, der wir ausgeliefert sind. „Das Gehirn tut etwas“, es erzeugt die Welt, wie wir sie sehen, wie sie aber physikalisch messbar nicht ist. In diesem Dilemma befindet sich die Philosophie, oder soll ich sagen, befand? Dazu später mehr.
Die Gegenbewegungen, die aus dieser Haltung heraus entstehen müssen, ist ein teilweiser Rückfall in genau die überwunden geglaubte Haltung blinden Glaubens, die man mit Esoterik umschreiben mag. Den Begriff würde ich gerne in zwei Hälften teilen. Es gibt meiner Auffassung nach eine seriöse und eine unseriöse Esoterik. Harmonik hat insofern nichts gemeinsam mit Esoterik, als sie nicht an etwas zu Glauben fordert, was wir nicht sehen oder wahrnehmen können.
Verwunderlich aber zunächst ein weiterer Zusammenhang, der das zentrale Element der Harmonik darstellt, ist die Verknüpfung zwischen musikalischem Intervall und Zahl. Hier verbindet sich musikalische Empfindung mit exakter Zahl. Eine Verbindung, die zwingend erscheint, je

öfter man darüber nachdenkt. Hier entsteht eine Brücke zwischen Innen und außen, zwischen Mensch und Welt.

Die Harmonik scheint den Finger am Puls der Zeit zu haben. Die von Werner Heisenberg aufgerichtete Schranke der Unschärfe zwingt umzudenken. Der Quantenphysiker Hans Peter Dürr, Wegbegleiter Heisenbergs, spricht davon, dass es die Materie, von der die Physik seit zwei Jahrhunderten Spricht nicht geben kann.

> Die Sprache der Quantenphysik ist eine Sprache der Verben, der Bewegungen. …Das Verbundene ist Synonym für Liebe, für Geist. … Materie und Energie ist ein Fußabdruck des Geistigen. … Es kommt alles aus der Bedeutung heraus[4]

Philosophisch zweifelhaft ist die Idee eines Gehirns, das etwas mit uns tut, da wir heute wissen, dass unser Bewusstsein die Synapsen des Gehirns permanent gestaltet. Wir sind also auf dem Weg, das Primat des Bewusstseins anzuerkennen und die Kluft zwischen Wissenschaft und Mensch zu überbrücken. Eine Verbindung zu schaffen, welche den Menschen mit der Schöpfung verknüpft.

Harmonik kann als Versuch gesehen werden, diese Brücke zu bauen, in dem sie von Klang der Welt spricht. Aber Klang ist Schwingung, Schwingung ist Zahl, und

> was ist das Weiseste?
>
> Zahl[5]

Sagten die Pythagoreer, der Mathematiker Leopold Kornecker sagte:

> Die Mathematik hat der Mensch erfunden, die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht

---

[3] Barrow, John D.; Die Natur der Natur; Wissen an den Grenzen von Raum und Zeit, Rohwolt, Hamburg, 1996; S.234.
[4] Dürr, Hans P.; (Vortrag)
[5] Riedweg, Christoph, Pythagoras, C. H. Beck Verl., 2002, S.104

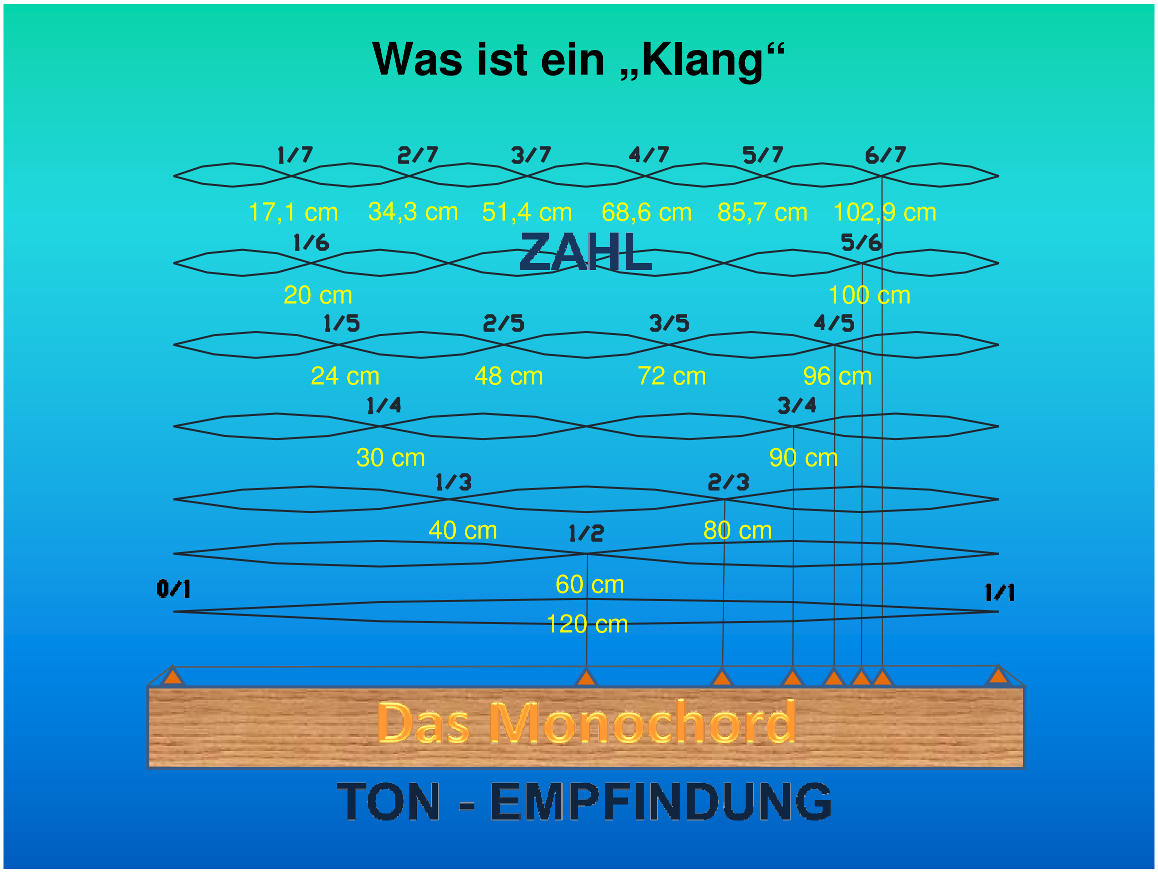


Bild 1

Das Monochord (im Bild 1 mit 120 cm Mensur(Saitenlänge)), ist ein gleich gestimmtes Saiteninstrument, mit beweglichen Stegen, es ist das zentrale Experimentierfeld der Harmonik im 20.Jahrhundert. Es ist überliefert, dass schon die Pythagoreer vor 2500 Jahren am Monochord experimentiert haben.
Das Monochord wurde von Hans Kayser in der Mitte des 20. Jahrhunderts neu entdeckt.
Hans Kayser schließt in seinen Werken, vor Allem mit dem Monochord als Mittel der Anschauung und Anhörung (AKROASIS), die vergessenen Lehren der Pythagoreer für uns auf.

Klang besteht immer aus einem Strauß von Obertönen. Diese Obertöne erscheinen am Monochord besonders einfach und werden Harmonische Obertonreihe genannt. Man kann sie am Monochord hörbar machen und voneinander separieren, also einzeln anhören.
Der Grundton, auch 1.Teilton, oder 1. Harmonische genannt, erscheint als stärkste Schwingung. Die zum 1. Teilton gehörige Schwingungsform, auch Schwingungsmode oder kurz Mode genannt, besteht aus einem Schwingungsbauch und zwei Schwingungsknoten, die am Ende der Saite (Bild 1 unten).

Der nächste Oberton, auch 2. Teilton genannt, hat einen Schwingungsknoten in der Mitte. Er teilt also die Saite, in zwei exakt gleiche Teile. Die folgenden Obertöne teilen die Saite in 3 -, 4 -, … n-, gleiche Teile auf. Theoretisch könnten wir die Reihe unendlich fortsetzen.

Wenn wir uns nun die Tonreihe einzeln anhören, so haben wir ein Frequenzverhältnis von 1:2:3:4:5:6 … usw. und ein Längenverhältnis von 1/1, 1/2, 1/3 … usw.
Die ersten Tonverhältnisse ergeben die bedeutendsten Intervalle unserer Musik, also 1:2, die Oktave, 2:3, die Quinte, 3:4, die Quarte, 4:5, die Gr. Terz, 5:6, die Kl. Terz.

Die Problematik der Obertonreihe. Um die Natur – Septimen mit den Frequenzverhältnissen 6:7 oder 7:8, gibt es Meinungsverschiedenheiten unter den Harmonikern. Manche Harmoniker sehen die Septime als disharmonisches Intervall, andere sehen die Septime in der Moderne als ein zunehmend als harmonisch empfundenes Intervall an. Die Sichtweise ist auch historisch begründet. Die Entwicklung der Musik gehe im Laufe der Jahrhunderte immer weiter und integriere immer komplexere Intervalle. Bisher wird die Naturseptime jedoch auf allen Instrumenten ersetzt durch die Intervalle 15:8 Große Septime und 9:5, kleine Septime. Beide Intervalle positionieren sich in den Tonleitern als Bestandteil der klassischen Dreiklänge, deren Frequenzverhältnisse 4:5:6, nicht über die Terzen 4.5 und 5:6 hinaus reichen.
Der Obertonreihe weiter folgend sind die Intervalle 8:9 großer Ganzton, 9:10, kleiner Ganzton noch von Bedeutung. Das Intervall 10:11 wird in der Musik nicht verwendet. 10:12 ist ein Oktavintervall zu 5:6. 12:13 findet wieder keine Verwendung in der Musik. Insgesamt kann man sagen, dass die Obertonreihe keine schlüssige Abbildung auf die in der Musik verwendeten Intervalle bietet. Nur die ersten Intervalle sind von großer Bedeutung. Der weitere Verlauf an Intervallen der Obertonreihe enthält Intervalle, die in der Musik nicht verwendet werden. Auch hier ergeben sich Unterschiede in der Interpretation. Manche sehen die Musikentwicklung als Entwicklung entlang der Obertonreihe an. Man werde also in Zukunft noch weitere Intervalle in die Musik integrieren, so dass die Obertonreihe als Gradmesser für den Entwicklungsgrad der Musik zu gelten habe. Ob diese Auffassung stimmt, werden die kommenden Jahrhunderte ergeben. Ich werde aber im Laufe meiner Darstellung zeigen, dass die Natur der Kristalle natürliche Grenzen aufweist, welche sich in den Intervallen 1:2 bis 5:6 wiederspiegeln. Es gibt also eine natürliche Grenze beim 6. Teilton, sofern man Abstände und Kräfteverhältnisse in Kristallen vertonen möchte. So ist beispielsweise die Distanz Wurzel(7) definitiv nicht in den Gitterdistanzen eines kubischen Kristallgitters vertreten[6].

[6] Die Gitterdistanzen werden mit dem Satz des Pythagoras ermittelt. $a^2 + b^2 = c^2$. Hierbei ist c der Gitterabstand. Er setzt sich aus der Summe zweier Quadrate zusammen. Die Summe zweier Quadratzahlen kann niemals 49 ergeben. Somit gibt es keinen Abstand c = 7.

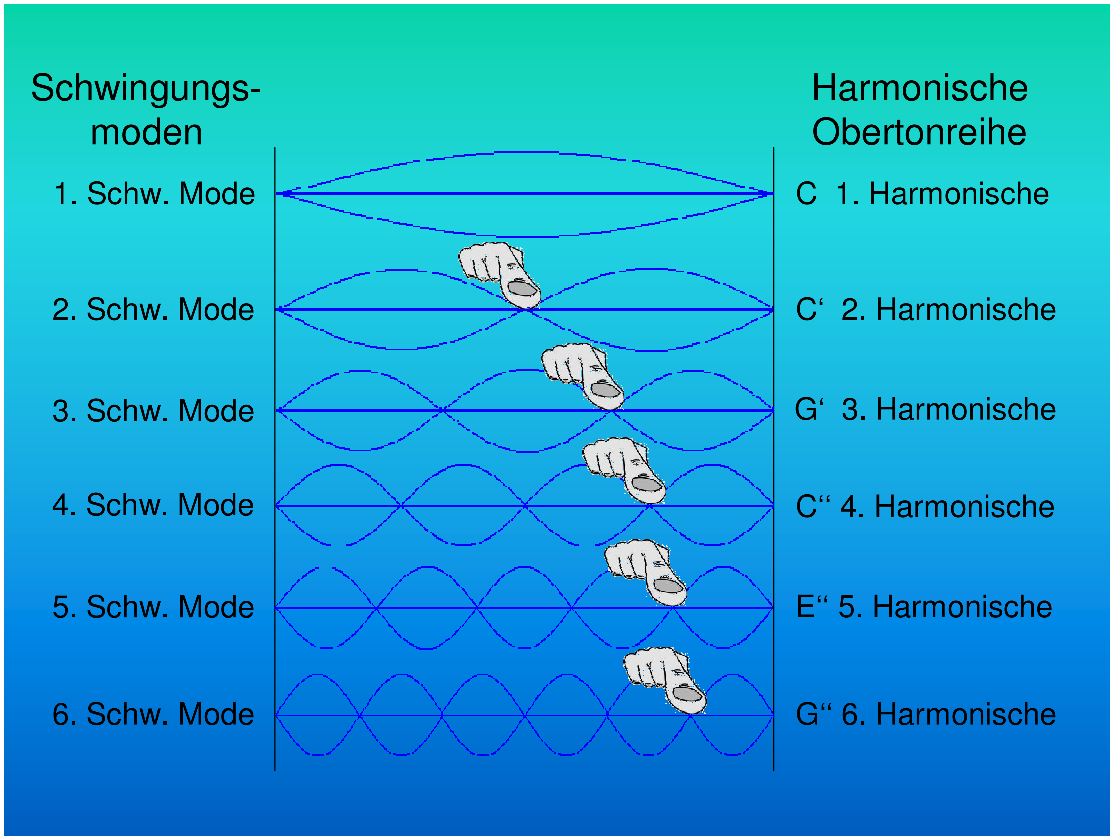


Bild 2

Die Harmonischen, also die Teiltöne der Obertonreihe werden entweder mit verschiebbaren Stegen wie in Bild 1 dargestellt, hörbar gemacht, oder durch abgreifen etwa wie beim Flageolett Spiel, wie in Bild 2 zu sehen. Der Trick dabei besteht darin, dass die Saite dort am Schwingen gehindert wird, wo sie im betreffenden Oberton sowieso nicht schwingen würde. Man zwingt die Saite dadurch in einem einzelnen Oberton zu schwingen.

Charakteristisch ist bei schwingenden Saiten ist die Verknüpfung von Schwingungsmoden (Schwingungsformen) und den Obertönen, den sog. Harmonischen, die wie eine fortlaufende Zahlenreihe geordnet erscheinen. Diese Situation nennt man Harmonische Obertonreihe.

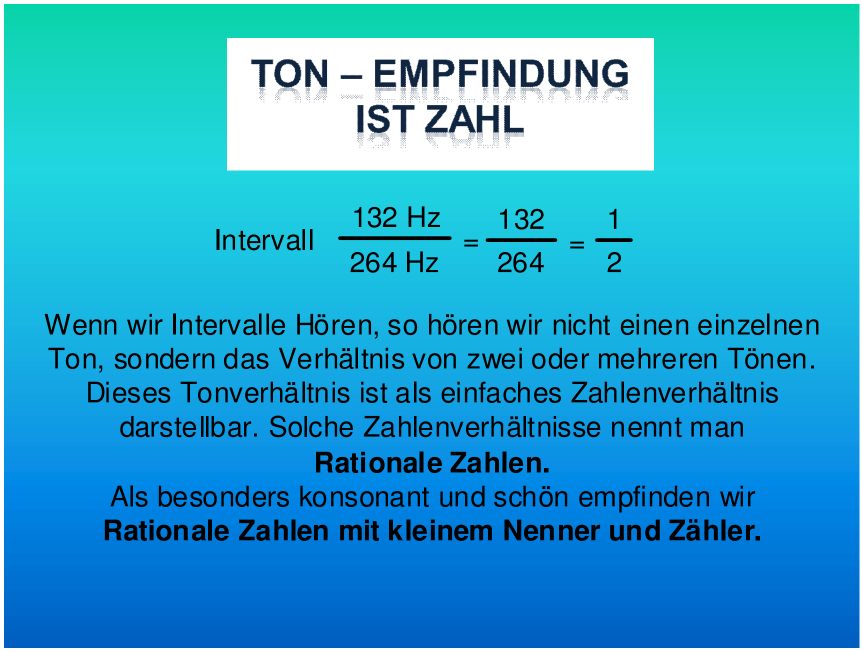


Bild 3

In vielen Publikationen wird darüber hinweg gegangen, dass das bisher Gesagte nur für ideale Saiten und schwingende Luftsäulen Gültigkeit hat.

Der Zusammenhang zwischen Ton-Empfindung und Tonzahl ist jedoch seit Jahrhunderten ein Faszinosum und auch Weltanschaulich interessant (Bild 4).

Der Benediktinermönch Guido von Arezzo (links), der Bischof Theobald von Arezzo (rechts) um 1025 am Monochord unterweist. Darstellung aus dem 12. Jahrhundert, Codex Lat. 51 f°35v., Wien, Österreichische Nationalbibliothek, Musiksammlung.
Bild 4

Wenn wir nun glauben, unsere physikalische Welt hielte sich an die harmonische Obertonreihe, so ist das zunächst ein Irrtum. Das Monochord, oder die schwingende Saite stellt physikalisch eine eindimensionale stehende Welle dar.

Zwei-, oder gar dreidimensionale Wellen erzeugen keine harmonischen Obertonreihen mehr.

Die „Kosmische Oktave“ ist ein esoterischer Wunschtraum, denn es existiert kein universelles Oktavgesetz in der klassischen- oder der Quantenphysik.

Angesichts der Vielfalt an Schwingungen in der Natur, stellt sich die Frage, warum wir uns so künstliche Gebilde wie Saiten- und

Blasinstrumente geschaffen haben, deren Musik aus schwingenden Saiten, Luftsäulen besteht, um damit zu musizieren. Haben die einfachen ganzen Zahlen eine tiefere Bedeutung?

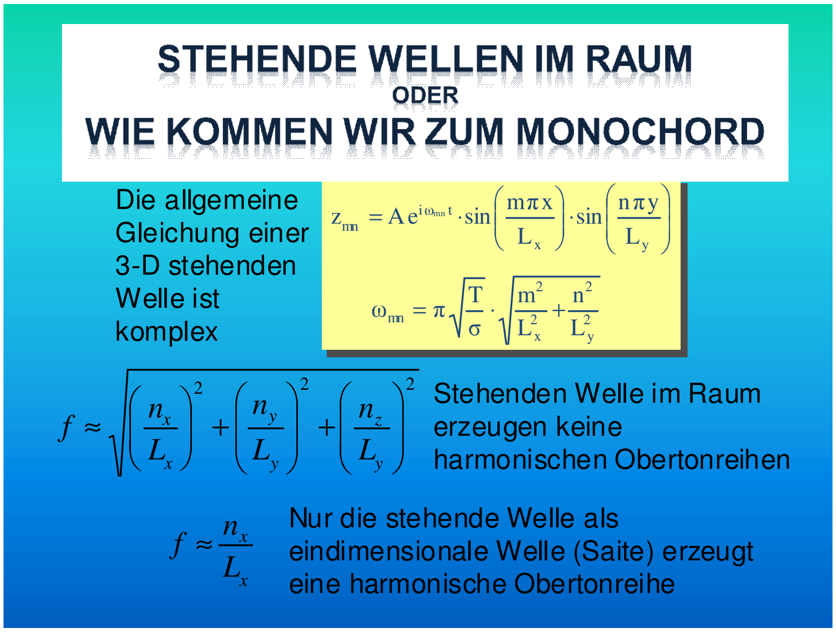


Bild 5

Anhand einer allgemeinen Gleichung für dreidimensionale stehende Wellen in kubischen Räumen möchte ich klar machen, dass die Lösung für eine eindimensionale stehende Welle nur ein Spezialfall aus einer allgemeinen Lösung ist.

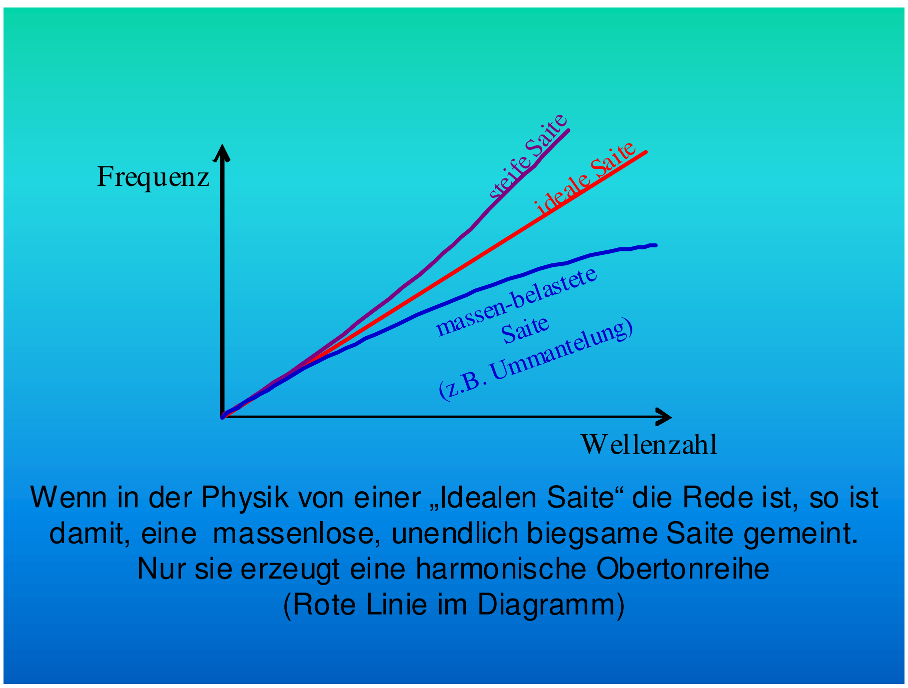


Bild 6

Nun zur Frage, warum die stehenden Wellen den ihnen zur Verfügung gestellten Raum so perfekt symmetrisch teilen, wieso also diese Zahlenteilungen stattfinden.

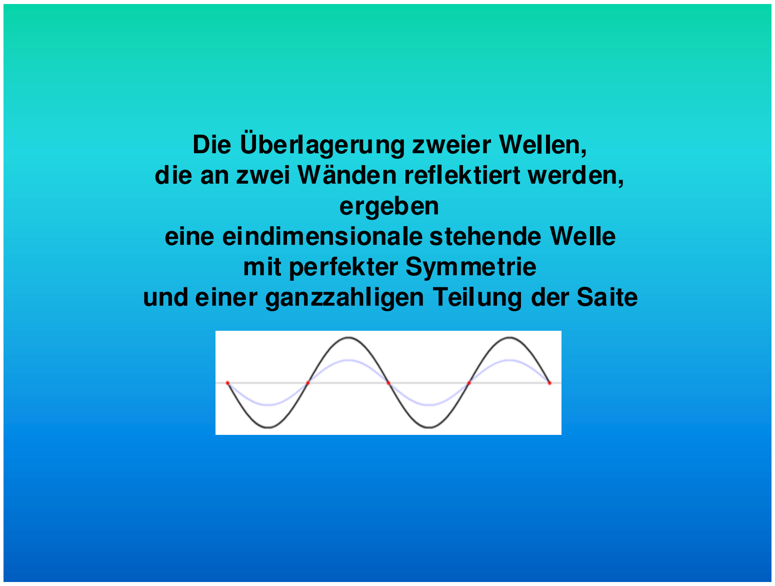


Bild 7

Zupft man eine Saite an einer beliebigen Stelle an, so breiten sich von diesem Punkt aus zwei Wellen aus. Die eine nach links, die andere Nach rechts. Beide Wellen werden am Rand reflektiert und laufen zurück. Die Überlagerung beider ständig hin und her laufenden Wellen ergibt eine stehende Welle, welche den Wellenraum perfekt und ganzzahlig teilt. Diese physikalisch-mathematische Tatsache gilt für alle stehenden Wellen, ob ein-, zwei-, oder dreidimensional. Eben das geschieht auch in der Atomhülle und auch dort ergeben sich ganzzahlige Verhältnisse, genau wie am Monochord.

Aber auch das gilt wieder nur exakt im Wasserstoffatom. Ich habe das auf dem Nürnberger Symposium 2011 ausführlich dargestellt.

Bild 8

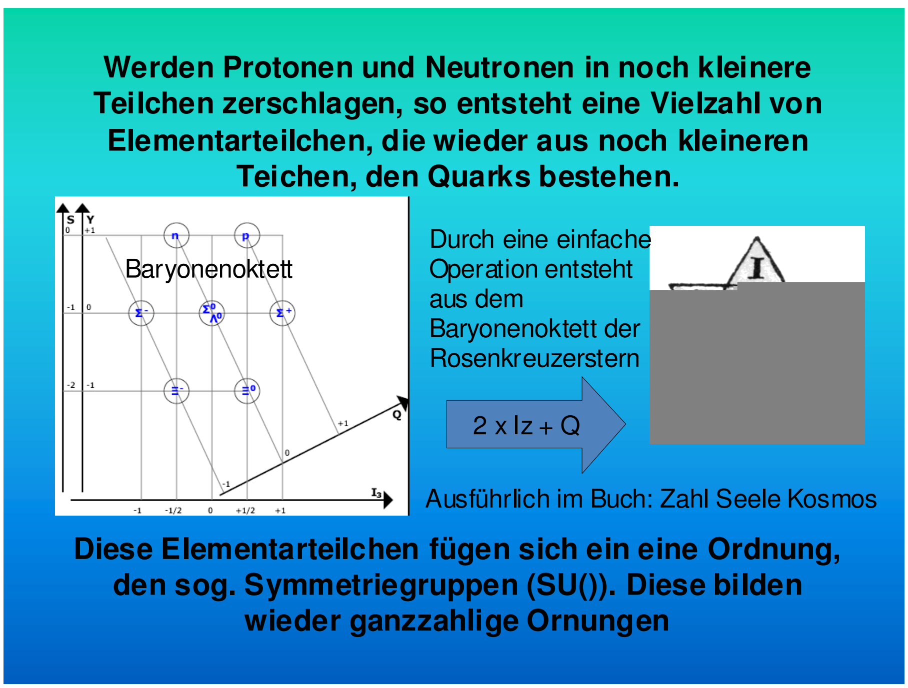


Bild 9

Auch in den kleinsten Teilchen der Materie finden wir wieder die einfachen am Monochord dargestellten Verhältnisse. Ausführlich in meinem Buch „Zahl Seele Kosmos" im Anhang dargestellt[7].

[7] Im Buch befindet sich noch ein Fehler in Bild 63, und 63a, der jedoch nichts am dargestellten Sachverhalt ändert und vom Verlag umgehend korrigiert wird.

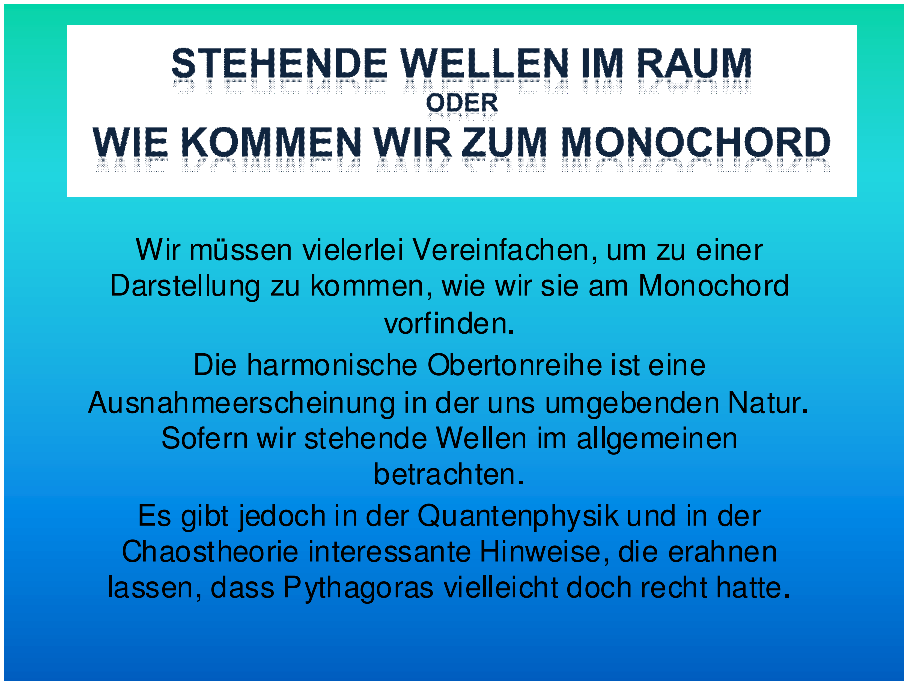


Bild 10

Die wieder Einführung des Monochords im 20. Jahrhundert führte zu einer Welle von Veröffentlichungen, die alle darauf gründeten, dass die Situation am Monochord ein allgemeines Naturgesetz wiedergeben würde. hingegen ist die harmonische Obertonreihe keineswegs so allgemein, wie leichtfertigerweise angenommen wurde. Der allgemeine Fall ist hingegen die Biegeschwingung, die jedoch ganz anderen Gesetzmäßigkeiten unterliegt.

Bild 11

Die für den Klang fester Körper verantwortlichen Biegeschwingungen haben keine harmonischen Obertonreihen mehr. Die Verknüpfung zwischen Schwingungsform(Mode) und Frequenz ist nur annähernd ganzzahlig, eigentlich aber gar nicht numerisch analytisch darstellbar. Diese Obertöne verhalten sich nicht nach Zahlen, da sie aus goniometrischen Gleichungen hervorgehen, deren Lösungen nur als Reihenentwicklung darstellbar sind, oder einfach näherungsweise geschätzt werden[8].

Alle festen Körper, aus jeder Art von Material und in jedweder Form erzeugen auf dies Art und Weise Töne. Ob ein Körper nur pocht oder ob er klingt ist dabei vollkommen egal.

Nimmt man, wie am Monochord, einige Vereinfachungen vor, so kann man sehen, dass der Zusammenhang zwischen Frequenz und Hauptabmessungen sehr einfach wird und für alle möglichen Formen gilt. In Bild 12 ist der Zusammenhang zwischen Frequenz und den Einflussgrößen, wie Schwingungsmode, Material und Geometrie zweier kreisrunder Platten angegeben.

---

[8] Kerscher, Michael, Xylophon und Glocke, Schwingungsmoden eines Stabes und einer Glocke, Ausarbeitung des gleichnamigen Seminarvortrages vom 30.6.2005, Im Rahmen des Seminars „Physik der Musikinstrumente“, (auch im Internet zu finden)

**Wir betrachten zwei kreisrunde Platten
Bei identischen Biege-Schwingungsmoden,
mit gleicher Dicke, aus gleichem Material,
mit unterschiedlichen Radien**

$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ unendliche Platte

$c'_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ dünne Platte

E: Elastizitätsmodul
ρ: Massendichte (ρ ≈ konst.)
ν: Poissonzahl (ν ≈ 0,3)
c: Wellengeschwindigkeit

$$\frac{f_{1mn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \cancel{(m+2n)^2} \cdot \frac{\pi^3 c_L d}{4\sqrt{3}R_1^2}}{f_{2mn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \cancel{(m+2n)^2} \cdot \frac{\pi^3 c_L d}{4\sqrt{3}R_2^2}} \qquad \frac{f_1 = \frac{\cancel{\pi^3 c_L d}}{\cancel{4\sqrt{3}}R_1^2}}{f_2 = \frac{\cancel{\pi^3 c_L d}}{\cancel{4\sqrt{3}}R_2^2}} \qquad \frac{f_1 = \frac{1}{R_1^2}}{f_2 = \frac{1}{R_2^2}} \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

f_1, f_2 Frequenzen zweier Platten, wenn in Schwingung versetzt.
R_1, R_2, Radien der beiden Platten.
m,n Schwingungsmoden in x- und y-Richtung $m_1=m_2$; $n_1=n_2$
d Dicke, $d_1=d_2$
c Wellengeschwindigkeit, $c_1=c_2$ siehe Kasten oben. Abhängigkeit vom Material.

Bild 12

Wir vereinfachen die Lösung, wie sie in Bild 12 links angegeben ist durch mehrere Annahmen. Dadurch ergibt sich einen sehr einfacher Zusammenhang zwischen Frequenz und Radius Bild 12 rechts. Betrachten wir Stäbe oder Röhren, so gilt der gleiche Zusammenhang zwischen Frequenz und Länge (Siehe Bild 12a[9]) oder etwa bei Schalen und Glocken zwischen Frequenz und Durchmesser[10].

Sie müssen dieses Ergebnis nun nicht weiter mathematisch aufschlüsseln. Ich werde anhand vieler Beispiele zeigen, wie das Ganze anschaulich wird und auch zeigen, dass hinter diesen vereinfachenden Annahmen ein Natur-Prinzip steht.

---

[9] Popov, Mechanik III, Vorlesung 5. URL: mechanik.tu-berlin.de/popov/mechanik3_ss03/.../Vorlesung5.pdf

[10] T. Lohse, M. zur Nedden, Physik der Musikinstrumente, Sommersemester 03, S. 81, 96, 99, (im Internet verfügbar) Gleichung in Bild 12, S.96. $(m+2n)^2$ ist ein empirischer Ansatz, die exakte Lösung mündet in eine goniometrische Gleichung, die nicht mehr analytisch lösbar ist. Daher keine Obertonreihe mit rationalen oder irrationalen Größen. Siehe Anm 3, Kerscher, S.7
Autor nicht angegeben, Die Physik von Becken und Glocken, S.5, (im Internet verfügbar)
Haller, Karl, Biegeschwingungen an Papierrollen, Kap 5 - 6, (im Internet verfügbar)

Wir betrachten zwei Balken
Bei identischen Biege-Schwingungsmoden,
mit gleichem Querschnitt, aus gleichem Material,
mit unterschiedlichen Längen

$$\frac{\omega_{1n} = \cdot \frac{n^2\pi^3}{l_1^{\,2}}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{\omega_{2n} = \cdot \frac{n^2\pi^3}{l_2^{\,2}}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2\pi \mathrm{f}_1 = \frac{1}{l_1^{\,2}}}{2\pi \mathrm{f}_1 = \frac{1}{l_1^{\,2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}_2} = \frac{l_2^{\,2}}{l_1^{\,2}}$$

f_1, f_2 Frequenzen zweier Balken, wenn in Schwingung versetzt.
l_1, l_2, Länge der beiden Balken.
n Schwingungsmoden sind gleich
E Elastizitätsmodul ist gleich bei gleichem Material
I Trägheitsmoment, gleich bei gleichem Material
A Querschnitt der beiden Balken(Röhren, Stäbe etc.) soll gleich sein

Bild 12b

Ich habe diese simple mathematische Vereinfachung deshalb dargestellt, weil es vielen Harmonikern unglaubhaft erscheint, dass man solche Klangkörper derart einfach und letztlich harmonikal betrachten kann. Man muss also solche Körper nicht erst akustisch vermessen. Der Trick besteht darin, dass man je zwei Klangkörper betrachtet, dabei entfallen alle Materialabhängigen Größen und alle Moden abhängigen Größen. Die Frequenzen und Radien treten als Proportionen auf. Es werden also keine einzelnen Frequenzen berechnet, sondern nur deren Proportionsabhängigkeit. Es ist z.B. völlig egal in welcher Frequenz ein Oktavintervall erklingt. Entscheidend ist lediglich das Frequenzverhältnis 1:2. Um dieses Frequenzverhältnis zu erreichen, muss man zwei Klangröhren lediglich im Verhältnis Wurzel(2):1 ablängen. Sie sollten, wegen der auftretenden Schwingungsmoden ein vernünftiges Verhältnis von Durchmesser zu Länge haben, das 1:10 nicht nennenswert übersteigt, um höhere Moden zu vermeiden. Die Klangkörper sollten stets in der ersten Mode schwingen, wenn sie angeschlagen werden.
Man könnte nun einwenden, wenn die Randbedingungen so aufwendig sind, handle es sich nicht um ein harmonikales Experimentierfeld. Nun ich muss dagegenhalten, dass eine schwingende Saite ganz ähnliche Randbedingungen aufweisen muss. Eine solche Saite, wie sie seit Pythagoras auf ein Monochord gespannt ist, nennt man in der Physik „Ideale Saite“, d.h., sie muss ausreichend flexibel sein, so dass Biegekräfte vernachlässigbar sind. Sie muss ausreichend dünn sein, um Massenkräfte so gering zu halten, dass sie keinen Einfluss ausüben. Sie muss Länge und Spannung haben, so dass sie im hörbaren Bereich schwingt, wenn sie ange-

schlagen wird. Kurz, ein solches Objekt ist in der uns umgebenden Natur selten. Die ersten Saiten, dürften Tiersehen gewesen sein.
Hingegen müssen Sie nur eine Haselnussrute von ca. 1-3 cm Dicke abschneiden, diese über ein Quadrat legen und nach Seite und Diagonale ablängen. Wenn Sie nun trocknen und anschlagen, können sie das Oktavintervall hören.
Nahezu alle Körper klingen nach den Gesetzen der Klangröhren. Ob Röhre, Stab, Scheibe, Schale oder Glocke. Glockengießer könnten in vergangenen Jahrhunderten längst bemerkt haben, dass zwei Glocken, deren Durchmesser sich z.B. wie die Diagonale zur Seite eines Quadrats verhalten im Oktavintervall erklingen. Konkret verdächtig sind die Steinmetzgilden, die zwar mit ihrem legendären Wissen Kathedralen erbauten, jedoch kaum Aufzeichnungen hinterlassen haben. Auch zwei Steinsäulen, würde man sie anschlagen, um etwa Risse zu finden, erklingen gemäß den gleichen Gesetzen wie Klangröhren aus Aluminium. Auch die Kenntnis irrationaler Zahlen ist nicht erforderlich, sondern lediglich etwas Erfindergeist und Spieltrieb. Ebensolches gilt für die Bauer von Glockenspielen. Hier habe ich den stärksten Verdacht. Denn ich wurde selbst beim Ausmessen eines Kinderglockenspiels auf die Zusammenhänge aufmerksam.
Lassen sie uns also zusammenfassen:

Gegenüberstellung der nötigen Vereinfachungen

Am Monochord	**An der Klangröhre** **(Stäbe, Platten, Schalen, Glocken)**[11]
Die „Ideale Saite“ **- Länge begrenzt (Moden im hörbaren Bereich z. 20 und 16.000Hz** **- Massenlos,** **- Unendlich biegsam** **- Beide Seitenenden sind fest**	**- Gleiche Schwingungsform (Mode)** **- Ähnliche Geometrie** **- Gleiches Material** **- Beide Seitenenden sind frei**

[11] Ich verwende künftig, der Einfachheit halber stellvertretend für die angegebenen Schwingungskörper, den Begriff *Klangröhre*

Gegenüberstellung der Konsequenzen für die Harmonik

Am Monochord	An der Klangröhre
Kann die Verbindung zwischen rationa- len Zahlen Und Intervallempfindung hörbar gemacht werden Der Begriff nach Hans Kayser AKROASIS	Kann die Verbindung zwischen Irrationalen Zahlen 2. Ord. geometrischen Längen und Intervallempfindung sichtbar gemacht werden Der entsprechende Begriff AISTHESIS

Ich darf an dieser Stelle anmerken, dass der gefundene Zusammenhang aus ganz unterschiedlichen Differentialgleichungen stammt. Das bedeutet, es muss sich um einen, allen Schwingungsphänomenen gemeinsamen Zusammenhang handeln, der mit der Gleichung:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2^2}{L_1^2}$$

Für Stäbe und Röhren
f=Frequenz, L=Länge

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Für Scheiben, Platten,
Schalen, Glocken
f=Frequenz, R=Radius

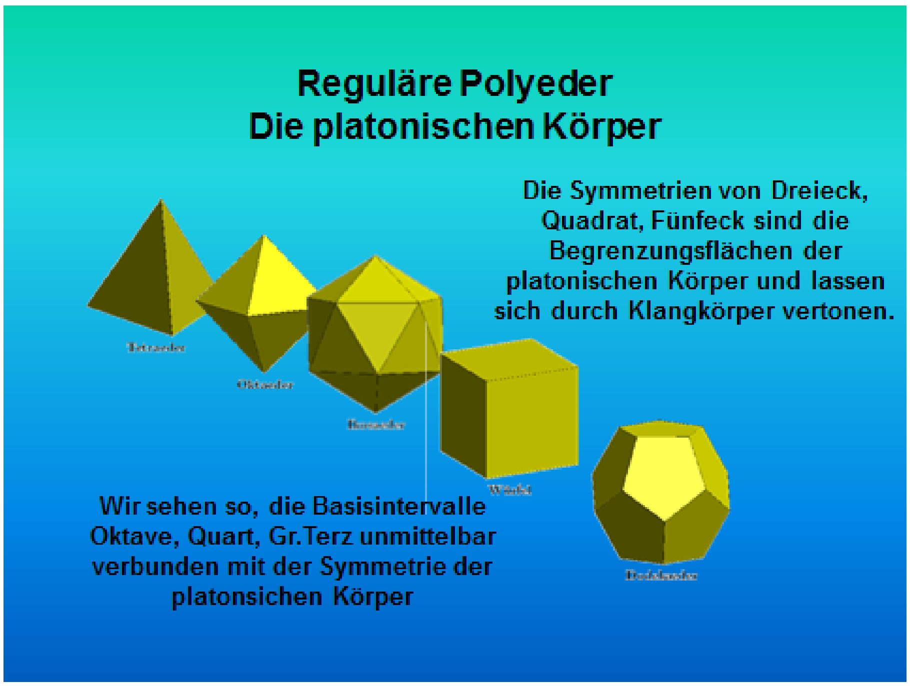
Beschrieben werden kann. zu beachten ist, dass Körperschallphänomene bei Klangkörpern keine Rolle spielen. Es sind die Biegeschwingungen, die allen Klangkörpern gemeinsam sind und die wir hören können, wenn wir sie anschlagen. Es ist dies ein so allgemeines Phänomen, dass man das mit Weingläsern ebenso tun kann, wie etwa mit Haselnusshölzern, die man sich mit einem Taschenmesser ablängen kann. Entscheidend ist, dass die Objekte nicht zu lang geraten, damit keine höheren Schwingungsmoden auftreten. Weingläser müssen ähnlich geformt sein. Der Phantasie sind hier keine Grenzen gesetzt. Wir haben ein absolut natürliches Phänomen vor uns, das überall in der Natur vorkommt.

Was die Physik der Biegeschwingungen betrifft, so kann man solche Schwingungen in festen Körpern auch durch mehrere Masse-Federsysteme nachbilden und rechnerisch annähern. wir haben es also mit schwingenden Massenpunkten zutun und es spielt die kinetische Energie $E=1/2mv^2$ eine tragende Rolle. Die Kinetische Energie steigt aber im Quadrat mit der Geschwindigkeit, bei Schwingungen im Quadrat mit der Kreisfrequenz. Somit ist der Zusammenhang physikalisch klar. Letzten Endes haben wir es mit einem Massenschwinger zutun, der sehr viele Parallelen zum Harmonischen Oszillator aufweist, der auch in der Quantenphysik beschrieben wird.
Die Obertöne, die durch höhere Schwingungsformen(Moden, m,n) erzeugt werden, findet man oft als ganzzahlig, etwa in der Form $(n+m)^2$ angegeben. Dies sind allerdings nur Erfahrungswerte (empirisch ermittelt). Die aus den Differentialgleichungen gefundenen Frequenzen gewinnt man aus goniometrischen Gleichungen (Sinus-, Sinushyperbolicus - Funktionen), deren Ergebnis keine algebraischen Zahlen ergeben, also keine Zahlen, die man exakt ermitteln kann. Insofern ist die Natur hier alles andere als Harmonikal.

HARMONIKALE

AISTHESIS

Die Vertonungen vermittels Klangröhren führen auf große Symmetriegruppen, wie die der platonischen und Archimedischen Körper, der Platonischen und Archimedischen Parkettierungen.



Die große Symmetrie

Die große Bedeutung für die Erfassung der elementaren Geometrien liegt vor Allem in zweierlei.

Zum Einen kann man sehen, dass die Symmetrie das tragende Element der Harmonik geworden ist, denn die Vertonung der Symmetrieachsen ist unmittelbar und bedarf keinerlei weiterer symbolischer Umwege. Sie ergibt sich aus der Physik der Klangröhren, etwa so, wie die Obertonreihe aus der schwingenden Saite am Monochord hervorgeht.

Zum andern wird nun klarer, wieso die Obertonreihe nicht eigenschaftslos wie eine Zahlenreihe fort zu setzen ist. Hier, bei der Betrachtung der Klangröhren begrenzen die Symmetrien der einfachen Polygone die Intervallentwicklung.

Die große Struktur

Diese Entwicklung geschieht nicht anhand einer simplen Zahlenreihe 1, 2, 3, usw., wie in der Obertonreihe, sondern anhand bestimmter symmetrieträchtiger Polygone. Nämlich jener Polygone, welche die symmetrischsten aller Körper, die Platonischen Körper begrenzen. Hier wird Musik und Symmetrie greifbar, aber ebenso untrennbar.

Wir wissen, dass es nur einige Stützstellen bei Sinus- und Cosinus-Funktionen gibt. Diese Stützstellen sind rationale Werte innerhalb der ansonsten Transzendenten Werte dieser Transzendenten Winkel-Funktionen. Auch eine so geartete Betrachtung würde zeigen, wieso die kleinen ganzzahligen Rationen so bedeutend in unserer Musik sind. Aus Platzgründen erspare ich mir, diese Untersuchung darzustellen.
Stattdessen stelle ich im Weiteren die Klangsymmetrien der Platonischen Körper dar.

.

Die Historie der Klangkörper

Es bleibt die Frage, ob die Verwendung von Klangkörpern wirklich neu ist. Ohne die Frage eingehend untersucht zu haben möchte ich zwei Zitate anführen:

Von Pythagoras ist überliefert, … Als er in einer Schmiede die Aufschläge von verschieden schweren Hämmern hörte, kam ihm, einer Legende von Jamblichos zufolge die Erkenntnis, dass sich Tonwerte in quantitativen Beziehungen ausdrücken lassen, **also in Zahlenwerten und geometrischen Maßen[12].**

Boethius erweitert und präzisiert die rein pythagoreische Lehre von musikalisch-optischer Korrelation von Zahlenverhältnissen durch eine **Gegenüberstellung von geometrischen Grundfiguren wie gleichseitiges Dreieck, Quadrat und Kreis mit den musikalischen Intervallverhältnissen der Musik[13]**

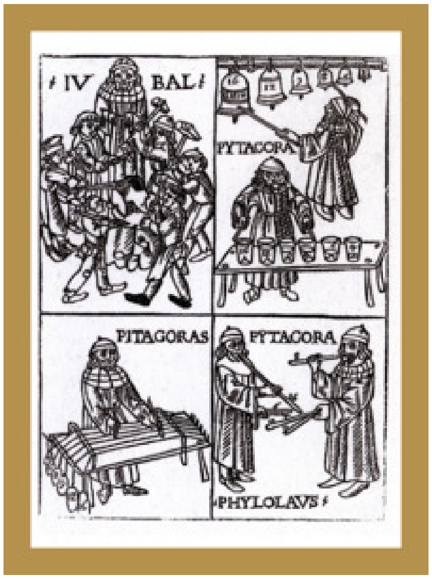
Ein ganz besonderes Fundstück ist das Folgende:

Von dem bedeutenden Pythagoreer Hippasos (5. Jahrh. v. Chr.) ist überliefert, er habe mit Bronzescheiben gleichen Umfangs und unterschiedlicher Dicke experimentiert[14].

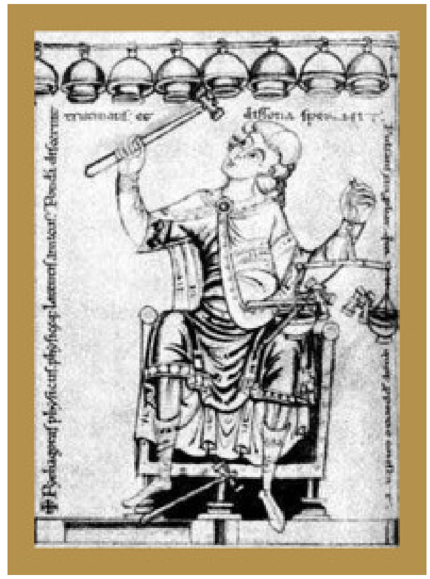
Dazu muss ich eine Erklärung geben. Unterschiedlich dick ausgeführte Platten gleichen Durchmessers ergeben eine lineare Beziehung zwischen Frequenz und Dicke, so dass wir hier eine Beziehung zwischen Gewicht und Frequenz haben. Habe wir etwa zwei Platten mit 1 und 2 cm Dicke, so erklänge ein Oktavintervall. Vermutlich kommt daher die Annahme, dass auch das Gewicht der Klangkörper, wie beim Monochord eine Obertonreihe erzeugen würde.

---

[12] Roob, Alexander: Alchemie & Mystik, Taschen, Köln, 2006, S.84
[13] (*De arithmetica* II 49) Zitiert in: Gefrorene Musik: Das Verhältnis von Architektur und Musik in der ästhetischen Theorie. Diplom-Ingenieur Architekt Khaled Saleh Pascha, Berlin, 5.2.2004, Nr. D83. Von der Fakultät VII – Architektur der Technischen Universität Berlin, Diss. S. 63.
[14] Riedweg Christoph, Pythagoras, C.H.Beck, München, 2002, S.46



F. Gaffurio, Theorica Musica, Mailand 1492


http://www.stauff.de/matgesch/dateien/wurzelbeweis2/hintergruende_d_rechts.htm

Der Hinweis aber, dass man noch im 5. Jahrhundert mit Klangkörpern experimentiert hatte, ist doch ein starkes Indiz dafür, dass man die in dieser Arbeit angeführten Zusammenhänge experimentell gefunden haben könnte. Sicher nicht in der Form irrationaler Zahlen, vielleicht aber als Maße einfacher regelmäßiger Polygone.
Ich erinnere aber daran, dass ein Glockengießer, sofern er die Wanddicke gleich lässt an den Glockendurchmessern die Maße dieser einfachen Geometrien finden könnte. Zwei Glocken die etwa im Oktavintervall erklingen, hätten die Durchmesser von Diagonale und Seite eines Quadrats.
Es ist daher anzunehmen, dass man die Zusammenhänge in rudimentärer Form schon einmal gefunden haben könnte. Die mangelnde und fehlerhafte Überlieferung mag das Ihre dazu getan haben, dass man heute nichts mehr davon weiß.
Ein Hinweis auf die Verwendung von Glocken kann an der Westpforte der Kathedrale zu Chartes aufgefunden werden. Über der Figur des Pythagoras, der über ein Monochord gebeugt dargestellt ist, steht eine Frau, wie sie die über ihr aufgehängten Glocken anschlägt.

Ich habe zahlreiche weitere Untersuchungen über Klangröhren, Klangkörper und den ihnen entsprechenden Geometrien angestellt. Sie wurden teilweise auf den Harmonik Symposien erläutert, teilweilweise sind sie noch unveröffentlicht. Ich werde versuchen sie im Zuge weiterer kleiner Schriften zu dokumentieren. Für eine umfassende Darstellung fehlt mir die Zeit.

Die Bedeutung der Klangröhren (Klangkörper) für die Pythagoreische Harmonik

Werner Heisenberg schrieb in der Teil und das Ganze:

… seit der berühmten Arbeit von Planck aus dem Jahre 1900 nannte man solche Forderungen Quantenbedingungen. Und diese Bedingungen brachten eben jenes merkwürdige Element von Zahlenmystik in die Atomphysik, von dem vorher schon die Rede war. Gewisse aus der Bahn zu berechnende Größen sollten ganzzahlige Vielfache einer Grundeinheit, nämlich des Planckschen Wirkungsquantums sein. **Solche Regeln erinnerten an die Beobachtungen der alten Pythagoreer, nach denen zwei schwingende Saiten dann harmonisch zusammenklingen, wenn bei gleicher Spannung ihre Längen in einem ganzzahligen Verhältnis stehen[15].**

Nun, eine solche Analogie wurde mit den vorliegenden Untersuchungen an Klangkörpern ebenfalls gefunden.
Die Quantenphysik hat die Zahl der fundamentalen Feldkräfte auf vier reduziert. Zwei von ihnen, die Gravitation und die Elektromagnetische sind vollkommen analog dem Phänomen der Klangröhren.
Die Feldkräfte verhalten sich umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat der Entfernung zum Kraftzentrum.
Analog verhält sich die Klangfrequenz umgekehrt proportional zum Längenquadrat eine Klangröhre.

Die Klangröhren und entsprechend auch andere Klangkörper, die den angegebenen physikalischen Bedingungen genügen, haben künftig für die Harmonik die gleiche Bedeutung, wie das Monochord. Beide haben ihre Berechtigung für die ihnen entsprechenden harmonikalen Untersuchungen. Vermutlich wurden beide schon von den Pythagoreern benutzt, ich nenne daher diese erweiterte Harmonik, Pythagoreische Harmonik.

Die Vertonung von Kristallstrukturen wird nun unmittelbar möglich.

Bedeutungen wie Größe, Gewicht, Farbe aber auch Schönheit und Harmonie liegen alleine in der Proportion, also im Verhältnis zweier Dinge verborgen.

Viele physikalische Bedingungen entfallen, solange wir lediglich die Verhältnisse, also die Proportionen betrachten.

Da wir wieder nur an der Relation zweier Kräfte F_1, F_2 interessiert sind, ist es unerheblich, wie groß sie tatsächlich sind. Daher fallen die Kraftwirkungen der Ladungen (q_1, q_2) weg. Sie sind in den Ionen - Kristallen alle gleich groß. Bedingung ist, dass es jeweils einwertige Ionen mit einer (+) oder (–) Ladung sind. Für mehrwertige Ionen gilt das nicht mehr.

Das Coulombsche Gesetz als Relation

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r_1^2}}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Das Vorzeichen der Ladungen q bewirkt die Richtungsumkehr der Kraftvektoren, ihr Betrag bleicht gleich.

Hier wieder die physikalisch- mathematische Darstellung als Grundlage der folgenden Betrachtungen an Ionischen Kristallen.

Hans Kaysers Vertonungen regelmäßiger Polygone vermittels einer ringförmig gedachten schwingenden Saite im Lehrbuch der Harmonik, weist andere Ergebnisse auf, als die vermittels Klangröhren.

An einer umfassenderen Darstellung der Thematik wird noch gearbeitet.

[15] Heisenberg, Werner, Der Teil und das Ganze, Piper, 8.Aufl. 2010, S.47